МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Чернігівський національний технологічний університет

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ "ВИЩА МАТЕМАТИКА"
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено
на засіданні кафедри вищої та
прикладної математики,
протокол № 2 від 16.09.2015 р.

ЧЕРНІГІВ ЧНТУ 2015

Теорія випадкових процесів. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів економічних спеціальностей./ Укл.: Балюнов О.О., Юрченко М.Є. – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – 44 с.

Укладачі: Балюнов Олексій Олександрович, кандидат фізико – математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ
Юрченко Марина Євгеніївна, кандидат фізико – математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ

Відповідальний за випуск: Балюнов Олексій Олександрович, завідувач кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ, кандидат фізико-математичних наук

Рецензент: Корнієнко Світлана Петрівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ЧНТУ

Зміст

ВСТУП 4

1 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ 5

2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. 6

2.1 Характеристики випадкових функцій 6

2.2 Характеристики суми випадкових функцій 13

2.3 Характеристики похідної від випадкової функції 15

2.4 Характеристики інтеграла від випадкової функції 18

3 КАНОНІЧНЕ РОЗКЛАДЕННЯ 22

4 СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. 24

4.1 Характеристики стаціонарної випадкової функції 24

4.2 Стаціонарно зв'язані випадкові функції 29

4.3 Кореляційна функція похідної від стаціонарної випадкової функції 31

4.4 Кореляційна функція інтеграла від стаціонарної випадкової функції 34

4.5 Взаємна кореляційна функція диференнційованої стаціонарної випадкової функції і її похідних 35

4.6 Спектральна щільність стаціонарної випадкової функції 37

4.7 Перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною динамічною системою 41

Рекомендована література 44

Вступ

При вивченні явищ навколишнього світу ми часто маємо справу із процесами, розвиток яких заздалегідь передбачити неможливо. Така непередбачуваність пояснюється впливом на хід процесів випадкових факторів. Строго кажучи, у природі немає невипадкових явищ, але є процеси, на які випадковість впливає несуттєво, і при їх вивченні цей вплив можна не брати до уваги, але є і такі, де випадковість відіграє основну роль (наприклад, броунівський рух частинок). Між цими двома полюсами перебуває багато процесів, на перебіг яких випадковість впливає більшою або меншою мірою.

Випадкові величини, які змінюються протягом випробування, називаються випадковими функціями. Вивченням подібних випадкових об'єктів, які є узагальненням поняття випадкових величин, займається новітній розділ теорії ймовірності – теорія випадкових функцій. Теорія випадкових (стохастичних) процесів – це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку. Теорія випадкових функцій продовжує активно розвиватися, оскільки в багатьох практичних задачах системного аналізу й теорії керування потрібно враховувати випадкові фактори саме в динаміці, тобто зважати на їхню мінливість у процесі випробування.

Дана методична розробка призначена для методичного забезпечення практичних занять та самостійної роботи студентів в рамках курсу «Теорія випадкових процесів». Цей курс читається після прослуховування студентами курсу «Теорія ймовірності та математична статистика». Ймовірнісні, або випадкові процеси є важливим поняттям теорії ймовірності, і являють собою узагальненням поняття випадкової величини, що змінюється з часом. Теорія випадкових процесів широко використовується у багатьох науках як природничого так і гуманітарного профілю.

В методичній розробці викладено основні теоретичні положення теорії випадкових процесів. До кожного розділу пропонується значна кількість задач.

Методична розробка складається з п’яти частин. До кожної частини подано достатню кількість завдань. Методичну розробку можна рекомендувати студентам 2 курсу спеціальності «Економічна кібернетика».

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення дисципліни є формування у майбутніх спеціалістів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих методів теорії випадкових функцій
Завданням дисципліни є : навчити студентів основам застосування методів теорії випадкових процесів для розв'язання прикладних задач;

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні математичні поняття, теоретичні положення і методи сучасної теорії випадкових процесів;
- методи теорії випадкових функцій;
- розраховувати математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкової функції;
- знаходити ймовірності випадкових процесів Маркова для дискретних та неперервних станів;
- знаходити ймовірність випадкових подій;
- знати основні методи опису випадкових змінних;
- основні властивості систем масового обслуговування;
- особливості багатоетапних керованих процесів та можливості застосування до них теорем та методів теорії випадкових процесів;
- вирішувати оптимізаційні задачі теорії масового обслуговування та розрахувати та підвищити надійність складної системи.

вміти: вибирати і застосовувати стандартні схеми та методи теорії випадкових процесів для розв'язання математичних задач, а також застосувати отримані знання при аналізі економічних явищ.

При вивченні навчальної дисципліни необхідно звернути увагу на:

- ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних економічних задач;
- розвиток логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури;
- здобуття навичок дослідження прикладних питань та умінь перевести задачу на математичну мову;
- формування навичок самостійного вивчення учбової літератури з теорії випадкових процесів;
- застосування отриманих знань для аналізу економічних процесів.

Зв'язок з іншими дисциплінами: дисципліна «Теорія випадкових процесів» є математичним фундаментом для глибокого вивчення курсів «Моделювання економіки» та «Дослідження операцій».

Предметом теорії випадкових процесів є задачі прийняття рішень в різних сферах економічної діяльності (планування, управління, розподілу інвестицій тощо), які розглядаються в динаміці їх розвитку.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Знати загальні положення та визначення теорії випадкових функцій. Знаходити основні характеристики випадкової функції та знати їх властивості, уявити, що математичне сподівання (МС), дисперсія та середнє квадратичне відхилення являють собою функції. Находити похідну та інтеграл випадкової функції.

2.1.Характеристики випадкових функцій

Випадковою функцією X (t) називають функцію невипадкового аргументу *t*, яка при кожному фіксованому значенні аргументу є випадковою величиною.

Перетином випадкової функції *X(t)* називають випадкову величину, відповідну до фіксованого значення аргументу випадкової функції.

Реалізацією випадкової функції *X(t)* називають невипадкову функцію аргументу *t,* якої дорівнює випадкова функція в результаті випробування.

Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як сукупність випадкових величин *{X (t)}, що* залежать від параметра *t,* або як сукупність її можливих реалізацій.

Характеристиками випадкової функції називають її моменти, які є невипадковими функціями.

Математичним сподіванням випадкової функції X (t) називають невипадкову функцію *mx(t),* значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу дорівнює математичному сподіванню перетину, що відповідає цьому ж фіксованому значенню аргументу:

$$mx(t)=M[X(t)].$$

Властивості математичного сподівання випадкової функції.

Властивість 1. *Математичне сподівання невипадкової функції φ(t) рівно самій невипадковій функції:*

$$M[\varphi(t)]=\varphi(t).$$

Властивість 2. *Невипадковий множник φ(t) можна виносити за знак математичного сподівання:*

$$M[\varphi(t)\cdot X[t]]=\varphi(t)\cdot M[X(t)]=\varphi(t)\cdot m_x(t).$$

Властивість 3. *Математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків:*

$$M\,[X\,(t)+Y\,(t)]\,=m_x\,(t)+my\,(t)$$

.

Властивість можна узагальнити на *n* функцій, що додаються:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t)$$

Наслідок. *Якщо X(t)* - випадкова *функція, φ(t)* - *невипадкова функція, то*

$$M\,[X\,(t)+\varphi\,(t)]\,=m_x\,(t)+\varphi\,(t).$$

Дисперсією випадкової функції X(t) називають невипадкову невід'ємну функцію Dx (t), значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу *t* дорівнює дисперсії перетину, що відповідає цьому ж фіксованому значенню аргументу:

$$Dx(t)=D[X(t)].$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової функції називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}.$$

Властивості дисперсії випадкової функції.

Властивість 1. *Дисперсія невипадкової функції φ(t) дорівнює нулю:*

$$D\,[\varphi(t)]=0.$$

Властивість 2. *Дисперсія суми випадкової функції X (t) і невипадкової функції φ(t) дорівнює дисперсії випадкової функції:*

$$D\,[X(t)+\varphi(t))=Dx(t).$$

Властивість 3. *Дисперсія добутку випадкової функції X(t) на невипадкову функцію φ(t) дорівнює добутку квадрата невипадкового множника на дисперсію випадкової функції:*

$$D[X(t)\cdot\varphi(t)]=\varphi^2(t)\cdot dx(t).$$

Центрованою випадковою функцією називають різницю між випадковою функцією і її математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{X}(\mathrm{t}) = \mathrm{X(t)} - \mathrm{m_x}(t).$$

Кореляційною функцією випадкової функції X(t) називають невипадкову функцію K_x (t_1, t_2) двох незалежних аргументів t_1 і t_2 значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює кореляційному моменту перетинів, що відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot \overset{\circ}{X}(t_2)].$$

При рівних між собою значеннях аргументів $t_1=t_2=t$ кореляційна функція випадкової функції дорівнює дисперсії цієї функції:

$$Kx(t, t)=Dx(t).$$

Властивості кореляційної функції.

Властивість 1. *При перестановці аргументів кореляційна функція не змінюється (властивість симетрії):*

$$Kx(t_1, t_2)= Kx(t_2, t_1).$$

Властивість 2. *Додаток до випадкової функції X(t) невипадкової складової φ(t) не змінює її кореляційної функції: якщо Y(t)=X(t)+φ(t), то*

$$Ky(t_1, t_2)= Kx(t_1, t_2).$$

Властивість 3. *При множенні випадкової функції X (t) на невипадковий множник φ(t) її кореляційна функція множиться на добуток* $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$*: якщо Y(t)=X(t)·φ(t),то*

$$Ky(t_1, t_2)=Kx(t_1, t_2)\cdot \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2).$$

Властивість 4. *Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій відповідних перетинів:*

$$K_x(t_1,t_2) \le \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}.$$

Нормованою кореляційною функцією випадкової величини X(t) називають невипадкову функцію двох незалежних змінних t_1 і t_2, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює коефіцієнту кореляції перетинів, що відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)}=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\sqrt{K_x(t_2,t_2)}}.$$

Абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$\left|\rho_x(t_1,t_2)\right|\leq 1.$$

Взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій X(t) і Y(t) називають невипадкову функцію *Rxy*(t_1, t_2) двох незалежних аргументів t_1 і t_2, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює кореляційному моменту перетинів обох функцій, що відповідають цим же фіксованим значенням аргументів:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Корельованими називають дві випадкові функції, якщо їх взаємна кореляційна функція не рівна тотожньо нулю.

Некорельованими називають дві випадкові функції, взаємна кореляційна функція яких тотожньо дорівнює нулю.

Властивості взаємної кореляційної функції.

Властивість 1. *При одночасній перестановці індексів і аргументів кореляційна функція не змінюється:*

$$Rxy(t_1, t_2)=Ryx(t_2, t_1).$$

Властивість 2. *Додаток до випадкових функцій X(t) і Y(t) невипадкових функцій φ(t) і ψ(t) не змінює їхньої взаємної кореляційної функції: якщо*

$$X_1(t)=X(t)+\varphi(t),\ Y_1(t)=Y(t)+\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2).$$

Властивість 3. *При множенні випадкових функцій X(t) і Y(t) на невипадкові множники, відповідно φ(t) і ψ(t), взаємна кореляційна функція множиться на добуток* $\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)$*:*

якщо

$$X_1(t)=X(t)\cdot\varphi(t),\ Y_1(t)=Y(t)\cdot\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\psi(t_2).$$

Властивість 4. *Абсолютна величина взаємної кореляційної функції двох випадкових функцій X(t) і Y(t) не перевищує середнього геометричного їхніх дисперсій:*

$$\left|R_{xy}(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}.$$

Нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій *X(t)* і *Y(t)* називають невипадкову функцію двох незалежних аргументів t_1 і t_2*:*

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_y(t_2)}=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)}\sqrt{D_y(t_2)}}.$$

Абсолютна величина нормованої взаємної кореляційної функції не перевищує одиниці: $\left|\rho_{xy}(t_1,t_2)\right|\le 1.$

Задачі для самостійної роботи

2.1 Випадкова функція *X (t)* у кожному перетині являє собою безперервну випадкову величину із щільністю розподілу *f(x,t)*. Написати вираз для математичного сподівання m_x *(t)* і дисперсії *Dx (t)* випадкової функції *X(t).*

2.2 Випадкова функція *X(t)* являє собою випадкову величину *X(t) = V,* де *V* — безперервна випадкова величина із щільністю розподілу φ(υ). а) Написати вираз одномірного закону (щільності) розподілу *f(x,t)* випадкової функції *X(t).* б) Знайти математичне сподівання *mx(t)* і дисперсію *Dx(t)* випадкової функції *X(t).* в) Написати вираз двовимірної функції розподілу $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ двох перетинів $X(t_1)$, $X(t_2)$ випадкової функції *X(t).*

2.3 Випадкова функція *X(t)* задана у вигляді *X(t)*=Vt+b, де V - *випадкова* величина, розподілена за нормальним законом з параметрами *mυ, συ, b* - невипадкова величина. Знайти щільність розподілу *f(x,t)* перетину випадкової функції *X(t)* і її характеристики *mx(t), Dx(f), Kx(t, t').*

2.4 Показати, що будь-яка функція двох аргументів, яка має вигляд $\sum D_i\varphi_i(t)\varphi_i(t'),$ де *Di* – невід‘ємні числа, *φi(t)* — будь-які дійсні функції *(i=1, …,n),* має всі властивості кореляційної функції.

2.5 Довести, що при множенні випадкової функції $X(t)$ на невипадковий множник $\varphi(t)$ кореляційна функція множиться на добуток $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$.

2.6 Відома кореляційна функція K_x випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції: а) $Y(t)=X(t)\cdot(t+1)$; б) $Z(t) = CX(t)$,де C — постійна.

2.7 Нехай $X(t)$ - випадкова функція, $\varphi(t)$ - невипадкова функція. Довести: якщо $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, то $Dy(t) = Dx(t)$.

2.8 Відома дисперсія $Dx(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції $Y(t) =X(t)+2$.

2.9 Дано: $X\ (t)$ — випадкова функція, $\varphi(t)$ — невипадкова функція. Довести: якщо $Y\ (t) = X(t)\cdot\varphi(t)$, то $Dy(t)=\varphi^2(t)\cdot dx(t)$.

2.10 Відома дисперсія випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкової функції $Y\ (t) = (t + 3)\ X\ (t)$.

2.11 На вхід підсилювальної ланки подається випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання й кореляційна функція якої відомі: $mx(t)=t$, $K_x(t_1,t_2)=e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}\ (\alpha>0)$. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію вихідної випадкової функції $Y(t)$, якщо коефіцієнт підсилення $k = 5$.

2.12 Довести, що кореляційна функція добутку двох центрованих некорельованих випадкові функцій дорівнює добутку кореляційних функцій співмножників.

2.13 Довести, що кореляційна функція добутку трьох центрованих незалежних випадкових функцій дорівнює добутку кореляційних функцій співмножників.

2.14 Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції $X(t) = U\cos 2t$, де U - *Випадкова* величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 6$.

2.15 Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції $X(t) = \sin 3t$, де U - *випадкова* величина, причому $M(U)=10$, $D(U) = 0,2$.

2.16 Відома кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2+5t_1^2t_2^2$ випадкової функції $X(t)$. а) Переконатися на прикладі при $t_1=1$, $t_2=2$ що абсолютна величина кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій відповідних перетинів; б) знайти нормовану кореляційну функцію й обчислити коефіцієнт кореляції перетинів, відповідних до значень аргументів $t_1=1, t_2=4$.

2.17 Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2e^{-|t_2-t_1|}$ випадкової функції *X(t)*. Знайти нормовану кореляційну функцію.

2.18 Знайти взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій: $X(t)=t^2U$ і $Y(t)=t^2U$, де *U* - випадкова величина, причому $D(U) = 5$.

2.19 Довести, що взаємна кореляційна функція випадкових функцій *X(t)* і *Y(t)* дорівнює взаємної кореляційної функції центрованих функцій $\overset{\circ}{X}(t)$ і $\overset{\circ}{Y}(t)$.

2.20 Довести, що при одночасній перестановці індексів і аргументів взаємна кореляційна функція двох випадкових функцій не змінюється: $Rxy(t_1, t_2)=Ryx(t_2,t_1)$.

2.21 Задана взаємна кореляційна функція $Rxy(t_1, t_2)= = \cos(\alpha t_1+\beta t_2)$. Написати взаємну кореляційну функцію $Ryx(t_1,t_2)$.

2.22 Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових функцій $X(t)=tu$ і $Y(t)=(t+l)U$, де U - *випадкова* величина, причому дисперсія $D(U)=10$.

Відповіді

2.1. $m_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx;\ D_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-m_x(t)]^2 f(x,t)dx$ **2.2** *а)* $f(x,t)=\varphi(x)$;

б) $m_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx=m_\upsilon$, $D_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_\upsilon)^2\varphi(x)dx=D_\upsilon$;

$$F(x_1,x_2,t_1,t_2)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\varphi(x)dx=F(x_1)при\_x_1<x_2\\ \int\limits_{-\infty}^{x_2}\varphi(x)dx=F(x_2)при\_x_2<x_1\end{cases}$$

2.3 *f(x,t)- нормальний закон з параметрами* $m\upsilon t+b$, $|t|\sigma\upsilon$; $mx(t)=m\upsilon t+b$;

$D_x(t)=t^2\sigma_\upsilon^2$; $K_x(t,t')=\sigma_\upsilon^2 tt'$; $\quad f(x,t)=\dfrac{1}{|t|\sigma_\upsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[x-(m_\upsilon t+b)]^2}{2t^2\sigma_\upsilon^2}}$

2.4 *Досить показати, що існує випадкова функція X(t), що має кореляційну функцію* **2.6** *а) $Ky=(t_1+1)(t_2+1)Kx$; б) $Kz=C^2Kx$* **2.8** *Dy(t)=Dx(t) 1.10 $Dy(t)=(t+3)^2Dx(t)$.* **2.11** *а) my(t)=5t,* $K_y = 25e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$. **2.14** *а) M[X(t)]=5cos2t; б) $Kx(t_1, t_2)=6\cos 2t_1 \cos 2t_2$; в) $Dx(t)=6\cos^{22}t$.* **2.15** *а) mx(t)=10sin3t; б) $Kx=0{,}2\sin 3t_1 \sin 3t_2$; в) $Dx(t)=0{,}2\sin^{23}t$.* **2.16** *а) Kx(1,2)=22, Dx(1)=6, Dx(2)=84; б)* $\rho_x(t_1,t_2)=(7\sqrt{6})/18$. **2.17** $\rho_x = e^{-|t_2-t_1|}$, *якщо аргументи одного знака,* $\rho_x = -e^{-|t_2-t_1|}$, *якщо аргументи різних знаків.* **2.18** *Rxy=5.1.21*$t_1^2 t_2^3$ *$Ryx(t_1,t_2)= Rxy(t_2,t_1)=\cos(\alpha t_2+\beta t_1)$.* **2.22** *$\rho xy=1$, якщо t_1 і t_2+1 одного знака; $\rho xy= -1$, якщо t_1 і t_2+1 різних знаків.*

2.2 Характеристики суми випадкових функції

Теорема 1. *Математичне сподівання суми скінченого числа випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків*.

Наслідок. *Математичне сподівання суми випадкової функції й випадкової величини дорівнює сумі їх математичних сподівань.*

Теорема 2. *Кореляційна функція суми двох корельованих випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних функцій, що складаються з взаємної кореляційної функції, яка додається двічі (з різним порядком проходження аргументів): якщо Z(t) = X(t) + Y(t), то*

$$Kz(t_1,t_2) = Kx(t_1,t_2)+ Ky(t_1,t_2)+ Rxy(t_1,t_2)+ Rxy(t_2,t_1).$$

Теорема узагальнюється на *n* попарно корельованих функцій:
якщо

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) \text{, то}$$

$$K_y(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t_1,t_2) + \sum_{i\neq j} R_{x_{ij}}(t_1,t_2),$$

де пари індексів *(i, j)* другого доданка є розміщення із чисел 1, 2, ... *n*, узятих по два.

Наслідок 1. *Кореляційна функція суми некорельованих випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних функцій доданків.*

Наслідок 2. *Кореляційна функція випадкової функції й некорельованої з нею випадкової величини дорівнює сумі кореляційної функції випадкової функції й дисперсії випадкової величини.*

Задачі для самостійної роботи

2.23. Задані кореляційні й взаємні кореляційні функції випадкових функцій *X(t)* і *Y(t).* Знайти кореляційну функцію випадкової функції *Z(t)=X(t)+Y(t)*, якщо розглянуті функції: а) корельовані; б) некорельовані.

2.24. Відомі математичні сподівання *mx(t)=2t+1, my(t)=t-1* і кореляційні функції $Kx=t_1t_2$, $K_y = e^{-4(t_2-t_1)^2}$ некорельованих випадкових функцій *X(t)* і *Y(t).* Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію випадкової функції *Z(t) = X(t) +Y(t).*

2.25. Задані кореляційні й взаємні кореляційні функції випадкових функцій *X (t)* і *Y (t).* Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових функцій *U(t) = ax(t)+by(t)* і *V(t)= cx(t) + dy (t),* де *a, b, з, d* — постійні дійсні числа.

2.26. Задані кореляційні й взаємні кореляційні функції випадкових функцій *X(t), Y(t), Z(t).* Знайти кореляційну функцію випадкової функції *U(t)=X(t)+Y(t)+Z(t)*, якщо розглянуті функції: а) попарно корельовані; б) попарно некорельовані.

2.27. Довести, що формулу $K_y = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i} + \sum_{i\neq j} R_{x_i x_j}$ для відшукання кореляційної функції суми $Y(t) = \sum X_i(t)$ *n* корельованих випадкових функцій можна записати у вигляді $K_y = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}} R_{x_i x_j}$

2.28. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію й дисперсію випадкової функції *X(t)=Ut+Vt*^{2}, де *U* і V – *некорельовані* випадкові величини, причому *M(U) = 4, M(V) = 7, D(U)=0,l, D(V) = 2.*

Вказівка. Взяти до уваги, що величини U і V некорельовані, тому їх кореляційний момент М [U-mu) (V-mʋ)]=0.

2.29. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію й дисперсію випадкової функції *X(t) =Usint+Vcost*, де *U* і V - *некорельовані* випадкові величини, причому *M(U)=1, M(V)=8, D(U)=D(V)=4.*

2.30. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію й дисперсію випадкової функції *X(t) == Ucos2t+Vsint+t*, де *U* і V – *некорельовані* випадкові величини, причому *M(U)=1, M(V)=2, D(U)=3, D(V) = 4.*

Вказівка. Додаток до випадкової функції невипадкового доданку, не змінює її кореляційної функції, тому досить знайти кореляційну функцію випадкової функції Y(t)=Ucos 2t + Vsint.

2.31. Задані випадкові функції $X(t)=Ucost+Vsint$, $Y(t)=Ucos3t+Vsin3t$, де U і V - *некорельовані* випадкові величини, причому $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=5$. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію $p_{xy}(t_1, t_2)$.

2.32. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $X(t)=U_1cos\omega_1t+V_1sin\omega_1t+U_2cos\omega_2t+V_2sin\omega_2t$, де ω_1, ω_2 $_e$ постійні числа; U_1, U_2, V_1, V_2 $_o$попарно некорельовані випадкові величини, причому їх математичні сподівання дорівнюють нулю, дисперсії величин U_1 і V_1 дорівнюють D_1, дисперсії величин U_2 і V_2 дорівнюють D_2.

Відповіді

2.23. *а)* $KZ(t_1, t_2)= KX(t_1, t_2)+ KY(t_1, t_2)+ RXY(t_1, t_2)+ RYX(t_2, t_1)$; *б)* $KZ= KX+KY$. **2.24.** *а)* $mz(t)=3t$; $K_z = t_1t_2 + e^{-4(t_1+t_2)}$. **2.26.** *а)* $KV=KX+KY+KZ+RXY+RYX+$ $+RXZ+RZX+RYZ+KZY$; *б)* $KV =KX+KY+KZ$. **2.28.** $mx(t)=4t+7t^2$; $Kx=0.1t_1t_2+$ $+2t_1^2t_2^2$; $Dx(t)=0.1t^2+2t^{4.1.29}$ $mx(t)=sint+8cost$; $Kx=4cos(t_{2-t1})$; $Dx(t)=4.1.30$ $mx(t)=cos2t+2sint+t$; $Kx=3cos2t_1cos2t_2+4sint_1sint_2$; $Dx(t)=3cos^{22}t+4sin^2t$. **2.31.** $\rho xy=cos(3t_{2-t1})$. **2.32.** $Kx=D_1cos\omega_1(t_{2-t1})+D_2cos\omega_2(t_{2-t1})$.

2.3. Характеристики похідної від випадкової функції

Вважають, що послідовність випадкових величин X_1, X_2 ..., X_n *збігається в середньоквадратичному* до випадкової величини X, якщо математичне сподівання квадрата різниці XnnX прагне до нуля при $n\to\infty$: $M[(XnnX)^2] = 0$. Випадкову величину X називають *межею в середньоквадратичному* послідовності випадкових величин X_1, X_2,..., X_n, ... і пишуть: $X = l.i.m.\ X_n$.

Випадкову функцію X (t) називають *диференційованою,* якщо існує така функція X' (t) (її називають похідною), що

$$l.i.m\,M\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right]^2=0$$

Таким чином, *похідною випадкової* функції X'(t) називають середньоквадратичну межу відношення приросту функції до приросту аргументу Δt при $\Delta t \to 0$:

$$X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right]$$

Теорема 1. *Математичне сподівання похідної* $X(t)=\dot{x}$ *від випадкової функції X (t) дорівнює похідній від її математичного сподівання:*

$$m_{\dot{x}}(t) = m_x(t).$$

Теорему 1 можна узагальнити: *математичне сподівання похідної порядку n від випадкової функції дорівнює похідній цього ж порядку від її математичного сподівання.*

Теорема 2. *Кореляційна функція похідної від випадкової функції X(t) дорівнює другій мішаній частинній похідній від її кореляційної функції:*

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Теорема 3. *Взаємна кореляційна функція випадкової функції X (t) і її похідної дорівнює частинній похідній від кореляційної функції по відповідному аргументу (якщо індекс* $\dot{x}$ *записаний на першому (другому) місці, то диференціюють по першому (другому) аргументу):*

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}, R_{\dot{x}x}(t_1,t_2) = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}$$

Задачі для самостійної роботи

2.33 Задано математичне сподівання $mx(t)=t^2+2t+1$ випадкової функції *X(t).* Знайти математичне сподівання її похідної.

2.34 Задано математичне сподівання $m_x(t)=t^2+4$ випадкової функції X(t). Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t)= tx'(t) + t^2$.

2.35 Довести, що математичне сподівання другої похідної від двічі диференційованої випадкової функції *X (t)* дорівнює другий похідної від її математичного сподівання.

2.36 Задана кореляційна функція $K_x = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$ випадкової функції *X(t).* Знайти кореляційну функцію її похідної.

2.37 Задана випадкова функція $X(t) =Ue^{3tcos}2t$, де U - *випадкова* величина, причому *M(U)=4, D(U)=l.* Знайти: а) математичне сподівання; 6) кореляційну функцію її похідної.

2.38 На вхід ланки, що диференціює, надходить випадкова *функція X(t)*, кореляційна функція *якої* $Kx=[Dxcos\omega(_t2 -_t1)]/(_t1+_t2)$. Знайти кореляційну функцію вихідної функції *Y(t) = X'(t).*

2.39 На вхід ланки, що диференціює, надходить випадкова *функція X(t)* з математичним *сподіванням* $mx(t)=5\sin t$ і кореляційною

$K_x = 3e^{-0.5(t_2-t_1)^2}$ функцією . Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію вихідної функції *Y(t) = X'(t).*

2.40 Довести, що взаємна кореляційна функція випадкової функції X(t) і її похідної дорівнює частинної похідної від кореляційної функції по аргументу, який «відповідає похідної» [якщо індекс $\dot{x}$ стоїть на першому (другому) місці, то треба диференціювати по першому (другому) аргументу]:

$$\text{а) } R_{x\dot{x}} = \frac{dK_x}{dt_2}; \text{ б) } R_{\dot{x}x} = \frac{dK_x}{dt_1}.$$

2.41 Задані кореляційні функції: а) $K_x = e^{-(t_2-t_1)^2}$; б) $K_x = t_1 t_2 e^{t_2+t_1}$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції X(t) і її похідної.

2.42 Відома взаємна кореляційна функція $R_{x\dot{x}}$ випадкової функції *X(t)* і її похідної. Знайти кореляційну функцію похідної.

2.43 Відома взаємна кореляційна функція $R_{x\dot{x}} = t_1(t_2+1)e^{t_2+t_1}$ випадкової функції *X(t)* і її похідної. Знайти кореляційну функцію похідної.

2.44 Знайти кореляційну функцію випадкової функції *Z(t)=X(t)+X'(t),* знаючи кореляційну функцію K_x.

2.45 Довести, що взаємна кореляційна функція випадкової функції і її другої похідної дорівнює частинної похідної другого порядку від кореляційної функції по аргументу, який «відповідає» похідної [якщо індекс $\ddot{x}$ на першому (другому) місці, то диференціюють кореляційну функцію по першому (другому) аргументу]:

$$R_{x\ddot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_2^2}; \quad R_{\ddot{x}x}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_x}{\partial t_1^2}.$$

2.46 Задана кореляційна функція $K_x = e^{-(t_2-t_1)^2}$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції X(t) і її другої похідної.

2.47 Знайти кореляційну функцію випадкової функції *Y(t)=U(t)X(t)+V(t)X'(t),* де *X(t)* – диференційована випадкова функція, кореляційна функція якої відома; *V (t)* і *U (t)*- невипадкові функції.

2.48 Задана кореляційна функція випадкової функції *X(t)*. Знайти взаємну кореляційну функцію *Ryz* випадкових функцій *Y(t)=ax(t)+bx'(t)* і *Z(t)=cx'(t)+dx(t),* де *a, b, з, d* - *постійні* дійсні числа.

Відповіді

2.33 $m_{\dot x}(t)=3t^2+2$.1.34 $my(t)=3t^2$.1.36 $K_{\dot x}=10e^{-(t_2-t_1)}[1-2(t_2-t_1)^2]$. **2.37** *а)* $m_{\dot x}(t)=4e^{3t}(3\cos 2t-2\sin 2t)$; *б)* $K_{\dot x}=e^{3(t_2-t_1)}(3\cos 2t_1-2\sin 2t_1)\cdot(3\cos 2t_2-2\sin 2t_2)$. **2.38** $K_y=D_x\dfrac{\varpi^2(t_1+t_2)^2+2}{(t_1+t_2)^3}\cos\varpi(t_2-t_1)$. **2.39** *а)* *my(t)=5cost;* *б)* $K_y=3e^{-0.5(t_2-t_1)}[1-(t_2-t_1)^2]$. **2.41** *а)* $R_{x\dot x}=-2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)^2}$; $R_{\dot x x}=-R_{x\dot x}$ *б)* $R_{x\dot x}=t_1e^{t_2+t_1}(t_2+1), R_{\dot x x}=t_2e^{t_2+t_1}(t_1+1)$. **2.42** $K_{\dot x}=\dfrac{\partial R_{x\dot x}}{\partial t_1}$. **2.43** $K_{\dot x}=(t_1+1)(t_2+1)e^{t_1+t_2}$. **2.44** $K_z=K_x+\dfrac{\partial^2K_x}{\partial t_1\partial t_2}+\dfrac{\partial K_x}{\partial t_2}+\dfrac{\partial K_x}{\partial t_1}$. **2.46** $R_{x\ddot x}=R_{\ddot x z}=2[2(t_2-t_1)^2-1]e^{-(t_2-t_1)^2}$. **2.47** *Ky=U(t₁)U(t₂)Kx+V(t₁)V(t₂)*$K_{\dot x}$ + *+U(t₁)V(t₂)*$\dfrac{\partial K_x}{\partial t_2}$ *+U(t₂)V(t₁)*$\dfrac{\partial K_x}{\partial t_1}$.

2.48 $R_{yz}=ac\dfrac{\partial K_x}{\partial t_2}+bc\dfrac{\partial^2K_x}{\partial t_1\partial t_2}+ad\dfrac{\partial^2K_x}{\partial_2^2}+bd\dfrac{\partial^3K_x}{\partial t_1^2\partial t_2}$.

2.4. Характеристики інтеграла від випадкової функції

Інтегралом від випадкової функції X (t) на відрізку *[0, t]* називають границю в середньоквадратичному інтегральної суми при прагненні до нуля часткового максимального інтервалу Δs_i (змінна інтегрування позначена через *s*, щоб відрізнити її від межі інтегрування *t*):

$$Y(t)=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum X(s_i)\Delta s_i=\int_0^t X(s)ds.$$

Теорема 1. *Математичне сподівання інтеграла від випадкової функції дорівнює інтегралу від її математичного сподівання:*

$$\textit{якщо}\, Y(t) = \int_0^t X(s)ds, \textit{ то } m_y(t) = \int_0^t m_x(s)ds$$

Теорема 2. *Кореляційна функція інтеграла від випадкової функції дорівнює подвійному інтегралу від її кореляційної функції:*

$$\textit{якщо}\, Y(t) = \int_0^t X(s)ds, \textit{ то } K_y = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1, s_2)ds_1 ds_2.$$

Теорема 3. *Взаємна кореляційна функція випадкової функції X(t) і інтеграла* $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ *дорівнює інтегралу від кореляційної функції випадкової функції X(t):*

$$R_{xy} = \int_0^{t_2} K_x(t_1, s)ds.$$

Задачі для самостійної роботи

2.49 Знаючи математичне сподівання $mx(t) = 3t^2 + l$ випадкової функції *X (t)*, знайти математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

2.50 Знайти математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, знаючи математичне сподівання випадкової функції *X(t)*: а) $mx(t)=cost;$ б) $mx(t)=4cos^2t$; в) $mx(t)=t-cos2t.$

2.51 Задана випадкова функція *X(t)=Ucosβt*, де U - *випадкова* величина, причому $M(U) = 5$. Знайти математичне сподівання

інтеграла $\mathrm{Y(t)} = \int_0^t \mathrm{X(s)ds}$.

2.52 Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, якщо відома випадкова функція *X (t)*: а) *X(t)=Usint;* б) $X(t)=Usin^2t,$ де U - *випадкова* величина, причому *M(U)=2.*

2.53 Задана випадкова функція $X(t)=U\cos^2 t$, де U - *випадкова* величина, причому $M(U)=2$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $\mathrm{Y(t)=(t^2+1)\int_0^t X(s)ds}$

2.54 Задана кореляційна функція $Kx(t_1,t_2)=\cos\omega t_1\cos\omega t_2$ випадкової функції $X(t)$. Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

2.55 Задана кореляційна функція $Kx=\cos\omega t_1\cos\omega t_2$, випадкової функції $X(t)$. Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

2.56 На вхід інтегруючого обладнання надходить випадкова функція $X(t)$, кореляційна функція якої $Kx=t_1t_2$. Знайти дисперсію на виході інтегратора.

2.57 Знайти дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, знаючи кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$: $а)K_x=2t_1^2t_2^2+3t_1t_2$;
$б)K_x=t_1t_2e^{t_1+t_2}$; $в)K_x=1/1+(t_2-t_1)^2$; $г)K_x=e^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1\cos 2t_2$.

2.58 На вхід інтегруючого обладнання надходить випадкова функція $X(t)$. Математичне сподівання й кореляційна функція цієї випадкової функції відомі: $mx(t)=\cos^2 t$, $Kx=\cos\omega t_1\cos\omega t_2$. Знайти: а) математичне сподівання б) кореляційну функцію; в) дисперсію на виході інтегратора.

2.59 Задана випадкова функція $X(t)=Ue^{3t\cos}2t$, де U - *випадкова* величина, причому $M(U)=5$, $D(U)=1$. Знайти: а) математичне сподівання, б) кореляційну функцію; в) дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

2.60 Знайти дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, знаючи випадкову функцію: а) $X(t) = U\cos 2t$, де U — випадкова величина, причому $M(U) = 5$, $D(U) = 6$; б) $X(t) = U\sin t$, причому $M(U) = 2$, $D(U)=3$.

2.61 Задана кореляційна функція $K_x = e^{-(t_1+t_2)}$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$

2.62 Задана випадкова функція *X(t)=Ucos3t*, де U - *випадкова* величина, причому *M(U)=1, D(U)=1*. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції $Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds$

2.63 Задана кореляційна функція $K_x = e^{\alpha(t_1+t_2)}\cos\beta t_1 \cos\beta t_2$. Знайти дисперсію випадкової функції $Y(t)=\frac{1}{2t^2}\int_0^t X(s)ds.$

2.64 Задана кореляційна функція $K_x = De^{-|t_2-t_1|}$. Знайти: а) кореляційну функцію; б) дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

2.65 Задані математичне сподівання *mx(t)=3+4t*, кореляційна функція $K_x = 10e^{-2|t_2-t_1|}$. Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

2.66 Довести, що якщо відома кореляційна, функція випадкової функції *X(t),* те взаємні кореляційні функції випадкових функцій *X(t)* і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ виражаються інтегралами:

а) $R_{xy}=\int_0^{t_2} K_x(t_1,s)ds$; б) $R_{yx}=\int_0^{t_1} K_x(s,t_2)ds$.

2.67 Знайти взаємні кореляційні функції випадкових функцій *X(t)* і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо відома кореляційна функція *Kx* випадкової функції *X(t):* а)$Kx=2t_1t_2+1$; б) $Kx=\cos t_1 \cos t_2$; в) $K_x = t_1t_2e^{t_1+t_2}$.

Відповіді

2.49 *$mx(t)=t^3+t$.* **2.50** *а) $my(t)=\sin t$, б) $my(t)=2t+\sin 2t$, в) $my(t)=0.5(t^{2-\sin}2t)$.* **2.51** *$my(t)=[5/(\alpha^2+\beta^2)][e\alpha t(\beta\sin\beta t+\alpha\cos\beta t)-\alpha]$.* **2.52** *а) $my(t)=2/(1+\alpha^2)$ $[e\alpha t(\alpha\sin t-\cos t)+1]$, б) $my(t)=t-0.5\sin 2t$.* **2.53** *$my(t)=(t^2+1)(t+0.5\sin 2t)$.* **2.54** *а) $Ky(t_1,t_2)=(\sin\omega t_1\sin\omega t_2)/\omega^2$; б) $Dy(t)=\sin^2\omega t/\omega^{2.1.55}$ а) $Ky=(\cos\omega t_{1-1})(\cos\omega t_{2-1})/\omega^2$; б) $Dy(t)=(\cos\omega t-1)^{2/}\omega^{2.1.56}$ $Dy(t)=t^4/4.1.57$ а) $Dy(t)= =t^4[2t^{2/9})+(3/4)]$; б) $Dy(t)=[et(t-1)+1]^2$; в) $Dy(t)=2t\ \mathrm{arctg}t-\ln(1+t^2)$; г) $Dy(t)=(1/169)[2e^{3t\sin}2t+3(2e^{3t\cos}2t-1)]$.* **2.58** *а) $my(t)=0.5[t+(\sin 2t/2)]$; б) $Ky=(\sin\omega t_1\sin\omega t_2)/\omega^2$; в) $Dy(t)=(\sin^2\omega t)/\omega^{2.1.59}$ а) $my(t)=(5/13)[e^{3t}\ (2\sin 2t+3\cos 2t)-3]$; б) $Ky(t_1,t_2)=(1/169)[e^{3t}(2\sin 2t_1+3\cos 2t_1)-3][e^{3t}\ (2\sin 2t_2+3\cos 2t_2)-3]$; в) $Dy(t)= (1/169)[e^{3t}(2\sin 2t+3\cos 2t)^2$* **2.60** *а) $Dy(t)= =1.5\sin^{22}t$; б) $Dy(t)=3(1-\cos t)^{2.1.61}$ $K_y - t_1 t_2 (e^{-t_1}-1)(e^{-t_2}-1)$.* **2.62** *а) $my(t)= =(\sin 3t)/3t$; б) $Ky=(\sin 3t_1\sin 3t_2)/9\ t_1t_2$; в) $Dy(t)=(\sin^{23}t)/9t^{2.1.63}$ $Dy(t)= =e^{2\alpha t}(\beta\sin\beta t+\alpha\cos\beta t-\alpha)^{2/4}t^4(\alpha^2+\beta^2)^2$.*

2.64 *а) $K_y(t_1,t_2)=D[2\min(t_1,t_2)+e^{-t_1}+e^{-t_2}-e^{|t_2-t_1|}-1]$, де $\min(t_1,t_2)$- найменше із чисел t_1 і t_2; б) $Dy(t)=2D(t+e-t-1)$.* **2.65** *а) $my(t)=3t+2t^2$; б) $Dy(t)=5(2t+e-2^{t-1})$.* **2.67** *а) $Rxy=t_1 t_2^2 +t_2$; б) $Rxy=\sin t_2\cos t_1$; в) $Rxy=t_1 e^{t_1}\ [(t_{2-1})e^{t_2}+1]$, $Ryx=t_2 e^{t_2}\ [(t_{1-1})e^{t_1}+1]$.*

3. Канонічне розкладання

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Знати правила лінійного перетворення випадкової функції динамічною системою. Особливо це стосується подвійного перетворення кореляційної функції.

Канонічним розкладанням випадкової функції *X(t)* називається її подання у вигляді

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{k=1}^{m}V_k\varphi_k(t),$$

де V_k *(k=l, ..., m)* - центровані некорельовані випадкові величини з дисперсіями D_k *(k = 1, ..., m)*; $\varphi_k(t)$ *(k = 1, ..., m)* — невипадкові функції.

Випадкові величини V_k *(k =1, ..., m)* називаються *коефіцієнтами,* а функції $\varphi_k(t)$ *(k=1, ..., m) и—координатними функціями* канонічного розкладання.

Якщо випадкова функція *X (t)* допускає канонічне розкладання (1) у дійсній формі, то кореляційна функція $K_x(t,t')$ виражається сумою, яка має вигляд

$$K_x(t,t') = \sum D_k \varphi_k(t)\varphi_k(t'),$$

та називається *канонічним розкладанням кореляційної функції.*

Задачі для самостійної роботи

3.1 Задана випадкова функція $X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t}$ де V_1 і V_2— некорельовані випадкові величини з характеристиками $m_{\upsilon_1} = m_{\upsilon_2} = 0; D_{\upsilon_1}, D_{\upsilon_2}\cdot$. Знайти характеристики випадкової функції *X(t).*

3.2 Випадкова функція *X (t)* задана своїм канонічним розкладанням $X(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i e^{-\alpha_i t} + a,$ де *Vi* - центровані випадкові величини з дисперсіями D_{υ_i} (*i*= *1,2,..., n*); *M[Vivj] = 0* при $i \neq j$, *a* - невипадкова величина. Знайти характеристики випадкової функції *X(t).*

3.3 Випадкова функція *X(t)* задана канонічним розкладанням $X(t)=t+V_1 \cos\omega t+V_2 \sin\ \omega t$, де V_1 і V_2 $_e$некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями, які дорівнюють нулю, і з дисперсіями $D_1 = D_2 = 2$. Визначити, чи є стаціонарної випадкова функція *X(t).*

3.4 Задано дві випадкові функції: $X(t)=t+V_1 \cos\omega t+ +V_2 \sin\omega t$, $Y(t)=t+U_1 \cos\omega t+U_2 \sin\omega t$. Математичні сподівання всіх випадкових величин V_1, V_2, U_1, U_2 дорівнюють нулю, дисперсії рівні $D_{\upsilon_1} = D_{\upsilon_2} = 1;\ D_{u_1} = D_{u_2} = 4;$ нормована кореляційна матриця системи (V_1, V_2, U_1, U_2) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ & 1 & 0 & -0,5 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Визначити взаємну кореляційну функцію *Rxy(t,t’)* і знайти значення цієї функції при *t=0, t’=1*. Визначити *Ryx(t,t’)* і знайти значення цієї функції при *t=0; t’=1.*

3.5 Випадковий процес має вигляд $X(t)= =t+U_1 \cos t+U_2 \sin t$, де $M[U_1] = 1$, $M[U_2]==2$, $K_U = \begin{pmatrix} 25 & 0,6 \\ 0,6 & 36 \end{pmatrix}$. Знайти канонічні розкладання процесу й кореляційної функції.

3.6 Випадкова функція задана канонічним розкладанням $X(t)=t+M_1\cos t+M_2\sin t$, $D[V_1]=1$, $D[V_2]=2$. Обчислити математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію процесу а) $Z(t)=\frac{dX(t)}{dt}$; б) $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

3.7 Випадковий процес $X(t)$ задано канонічним розкладанням $X(t)=1+Ut+Vt^2$ з характеристиками $DU=3$, $Dv=l$. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію похідної даного процесу. Знайти математичне сподівання й дисперсію процесу.

Відповіді

3.1 $mx(t)=0; Kx(t,t')=D_{\upsilon_1}e^{-\alpha_1(t+t')}+D_{\upsilon_2}e^{-\alpha_2(t+t')}$ $D_x(t)=D_{\upsilon_1}e^{-2\alpha_1 t}+D_{\upsilon_2}e^{-2\alpha_2 t}$.

3.2 $mx(t)=a; K_x(t,t')=\sum_{i=1}^{n}D_{\upsilon_i}e^{-\alpha_i(t+t')}; D_x(t)=\sum_{i=1}^{n}D_{\upsilon_i}e^{-2\alpha_i t}$.

3.4 *а)* $Rxy(t,t')=\cos(\omega_1 t+\omega_2 t')$, $Rxy(0,1)=\cos\omega_2$; *б)* $Ryx(t,t')=\cos(\omega_1 t'+\omega_2 t)$, $Ryx(0,1)=\cos\omega_{1.2.}$ **3.5.** $X(t)=t+\cos t+2\sin t+V_1\varphi_1(t)+V_2\varphi_2(t)$, $Kx(t_1,t_2)= =\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)+(13/8)\ \varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)$, *де* $\varphi(t)=A\psi(t)$, $V=(AT)^{-1}\dot{U}$, $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}25 & 18\\ 0 & 24\end{pmatrix}$, $(AT)^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}24 & 0\\ -18 & 25\end{pmatrix}$. **3.6** *а)* $mz(t)=1$, $Dz(t)=1+\cos^2 t$, $Kz(t_1,t_2)=\sin t_1\sin t_2+ +2\cos t_1\cos t_2$; *б)* $my(t)=t^{2/2}$, $Dy(t)=(1-\cos t)^2+2(1-\cos t)$, $Ky(t_1,t_2)=\sin t_1\sin t_2+ +2\cos t_1\cos t_{2-2}(\cos t_1+\cos t_2)+2.2.$**7** $mz(t)=0$, $Kz(t_1,t_2)=3+4t_1t_2$, *де* $Z(t)= =dx(t)/dt$.

4. Стаціонарні випадкові процеси

НАВЧАЛЬНІ ЦІЛІ ЗАНЯТТЯ: Вивчення властивостей та характеристик стаціонарних випадкових процесів, методів обчислення характеристик СВП та правил їхнього перетворення лінійною динамічною системою. Поняття про стаціонарну зв'язанність.

4.1. Характеристики стаціонарної випадкової функції

Стаціонарною називають випадкову функцію $X(t)$, математичне сподівання якої є сталою при всіх значеннях аргументу t, і кореляційна функція якої залежить тільки від різниці аргументів $t_2 - t_1$. Звідси випливає, що:

1. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є функція одного аргументу $\tau= t_2 - t_1$:

$$Kx(t_1, t_2)=kx(t_2 - t_1)=kx(\tau).$$

2. Дисперсія стаціонарної випадкової функції постійна для всіх значень аргументу *t* і дорівнює значенню кореляційної функції на початку координат $(\tau=0): DX(t)=kx(0)$.

Кореляційна функція стаціонарної функції має наступні властивості.

Властивість 1. *Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції парна функція :*

$$kx(\tau)=kx(-\tau).$$

Властивість 2. *Абсолютна величина кореляційної функції стаціонарної випадкової функції не перевищує її значення на початку координат:*

$$|\, kx(\tau) \,| \le kx(0).$$

Нормованою кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції називають невипадкову функцію аргументу τ:

$$\rho x(\tau)=kx(\tau)/kx(0).$$

Абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$|\, \rho_x(\tau) \,| < 1.$$

Задачі для самостійної роботи

4.1 Двовимірний закон розподілу випадкової функції X(t) описується щільністю $f_2(x,\frac{y}{t_1},t_2)=\frac{1}{2\pi(1+t^2)}\exp\left(-\frac{(x-\upsilon t)^2+(y-\upsilon t)^2}{2(1+t^2)}\right)$, де $\upsilon>0$. Знайти основні характеристики: $mx(t)$, $Dx(t)$ і $Kx(t_1, t_2)$.

4.2 Випадкова величина є частковим випадком такої випадкової функції, у якої відсутня залежність від *t*. Нехай $X(t)=X$ для всіх $t\in R$, причому *X* — С.В.Н.Т., що має показовий розподіл з параметром $\lambda= 2$. Знайти $m_x(t)$, $Dx(t)$ і $F_2(x, y/t_1, t_2)$.

4.3 Випадковий процес *X(t)* має вигляд $X(t)=Vt^2$, $(t>0)$, де V - *випадкова* величина, рівномірно розподілена на *[0,3]*. Знайти одномірну функцію розподілу й одномірну щільність цього процесу.

4.4 Випадкова функція *X(t)* задана у вигляді $X(t)=Vt+b$, де V-*3*. В. Н. Т., що описується законом $N(m, \sigma)$, *а b невипадкові* константи. Знайти одномірну щільність $f_1(x/t)$ і основні характеристики процесу: $mx(t)$, $\sigma x(t)$ *і* $Kx(t_1, t_2)$.

4.5 Випадкова функція *X(t)* задана у вигляді $X(t)=U+Vt$, де *U* і V - *незалежні* випадкові величини, що задовольняють тому самому закону розподілу $N(m,\sigma)$. Використовуючи властивості математичного сподівання й дисперсії, обчислити $mx(t)$, $Dx(t)$ *і* $Kx(t_1, t_2)$.

4.6 Задані щільності *fu(u)* і *fv(v)* незалежних випадкових величин *U* і *V*. Записати одномірну щільність $f_1(x/t)$ процесу $X(t)=U+Vt$ при $t > 0$.

4.7 Задані кореляційні функції $Kx(t_1, t_2)$ і $Ky(t_1, t_2)$ і математичні сподівання *mx(t)* і *my(t)* двох незалежні випадкові процесів *X(t)* і *Y(t).* Знайти кореляційну функцію процесу $Z(t)=X(t)Y(t)$.

4.8 Показати, що якщо дві випадкові функції *X(t)* і *Y (t)* некорельовані при будь-якому фіксованому t і мають нульові математичні сподівання, то кореляційна функція їх добутку дорівнює добутку кореляційних функцій окремих співмножників.

4.9 Довести наступну властивість кореляційної функції: якщо $Y(t)=\psi(t)X(/)+\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - невипадкові функції, то $KY(t_1, t_2)=\psi(t_1)\psi(t_2)KX(t_1,t_2)$.

4.10 Дана кореляційна функція випадкового процесу *X(t):* $K_x(t_1,t_2)=\dfrac{1}{1+(t_1-t_2)^2}$. Знайти кореляційну функцію й дисперсію процесу $Y(t)=e^{-t^2}X(t)+\sin 2t.$

4.11 Випадковий процес *Z(t)* заданий у вигляді $Z(t)=X(t)+ +ty(t)+t^2$, де *X(t)* і *Y (t)* — некорельовані випадкові процеси з

характеристиками $m_x(t)=4, K_x(t_1,t_2)=9e^{-2|t_2-t_1|}$ $m_y(t)=1, K_y(t_1,t_2)=4e^{-2|t_2-t_1|}$.

Знайти *mz(t)* і *Dz(t).*

4.12 Задані випадкові функції *X(t) = -Usint + Vcost, Y(t)=Ucost + Vsint*, де *U* і V – *некорельовані* стандартизовані випадкові величини. Знайти автокореляційні функції $\rho x(t_1, t_2)$ і $\rho y(t_1, t_2)$ процесів *X(t)* і *Y(t),* а також кореляційну функцію зв'язку $\rho xy(t_1, t_2)$.

4.13 Задана випадкова функція *X(t)=cos(t+φ),* де φ - *випадкова* величина, розподілена рівномірно в інтервалі *(0,2 π).* Довести, що *X(t)* *с*таціонарна функція.

4.14 Задана випадкова функція *X(t)=sin(t + φ),* де φ - *випадкова* величина, розподілена рівномірно в інтервалі *(0, 2π).* Довести, що *X (t)* *с*таціонарна функція.

4.15 Довести, що якщо *X(t)* - стаціонарна випадкова функція, Y - *випадкова* величина, яка не пов‘язана з *X(t)* то випадкова функція *Z(t)=X(t) + Y* стаціонарна.

4.16 Довести, що якщо *X(t)* - стаціонарна випадкова функція, $Y=X(t_0)$ - випадкова величина, то випадкова функція *Z(t) = X(t) + Y* нестаціонарна.

4.17 Стаціонарна чи випадкова функція *X (t) = Ucos2t*, де Ua *випадкова* величина?

4.18 Чи є стаціонарної випадкова функція *X(t)=Usint +Vcost*, де *U* і V - *некорельовані* випадкові величини, причому *mu=mv= 0, Du=Dv=D*?

4.19 Задана випадкова функція $X(t) = t^2 + Usint + Vcost$, де *U* і V - *випадкові* величини, причому *M(U)=M(V)=0, M(UV)=0; D(U)=D(V)=10*. Довести, що: а) *X(t)* — нестаціонарна функція; б) $\overset{\circ}{X}(t)$ - стаціонарна функція.

4.20 Чи буде стаціонарною випадкова функція $X(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$, де *a, ω - додатні* постійні числа: φ - *випадкова* величина, щільність розподілу якої $f(\varphi) = \cos\varphi$ в інтервалі $(0, \pi/2)$?

4.21 Довести нестаціонарність випадкової функції $X(t)= =a\sin(\omega t+\varphi)$, де *a, ω- додатні* числа; φ - *нормально* розподілена випадкова величина, щільність імовірності якої $f(\varphi) = (1/\sqrt{2\pi}\ ) e^{(-\varphi^2/2)}$.

4.22 Знайти дисперсію випадкової функції $X(t)= a\sin(\omega t+ \varphi)$, де *a, ω - додатні* числа; φ - *нормально* розподілена випадкова величина, щільність імовірності якої $f(\varphi) = (1/\sqrt{2\pi}\ ) e^{(-\varphi^2/2)}$.

4.23 Довести, що кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парна функція.

4.24 Відома кореляційна функція $kx(\tau)$ стаціонарної функції $X(t)$. Довести, що якщо $Y(t) = ax(t)$, те $ky(\tau)=a^2kx(\tau)$.

4.25 Відома кореляційна функція $k_x(\tau) = De^{-\alpha^2\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t) = 4X(t)$.

4.26 Довести, що дисперсія стаціонарної випадкової функції $X(t)$ постійна й дорівнює значенню кореляційної функції на початку координат: $Dx(t) = kx(0)$.

4.27 Довести, що абсолютна величина кореляційної функції стаціонарної випадкової функції не перевищує її значення на початку координат: $|kx(\tau)] \leq kx(0)$.

4.28 Знайти нормовану кореляційну функцію, знаючи кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$: а) $kx(\tau) = 3e^{-\tau^2}$; *б)* $kx(\tau)=Dxe\text{-}|\tau|\cdot(1+|\tau|)$.

Відповіді

4.1 *mx(t)=υt, Dx(t)=1+t²*, $Kx(t_1,t_2)=\begin{cases}0, t_1 \neq t_2,\\ 1+t^2, t_1=t_2=t.\end{cases}$ **4.2** *mx(t)=1/2; Dx(t)=1/4;*

$F_2(x,y/t_1,t_2)=\begin{cases}0, x \le 0\_или\_y \le 0,\\ F_x(x)=1-e^{-2x}, 0<x<y,\\ F_y(y)=1-e^{-2y}, 0<y<x.\end{cases}$ **4.3** $F_1(x/t)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{1}{3}\frac{x}{t^2}, 0<x\le 3t^2,\\ 1, x>3t^2;\end{cases}$

$f_1(x/t)=\begin{cases}\frac{1}{3t^2}, x\in(0,3t^2),\\ 0, x\notin(0,3t^2).\end{cases}$ **4.4** $f_1(x/t)=\frac{1}{\sigma|t|\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-tm-b)^2}{2t^2\sigma^2}\right\}$, *mx(t)=tm+b,*

$\sigma x(t)=\sigma|t|$, $Kx(t_1,t_2)=t_1t_2\sigma^{2.3.4.}$ **4.5** $mx(t)=m(1+t)$, $Dx(t)=\sigma^2(1+t^2)$, $Kx(t_1,t_2)=\sigma^2(1+t_1t_2)$.

4.6 $f_1(x/t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(\upsilon) f_U(x-\upsilon t)d\upsilon$, *t>0.3.7* $Kz(t_1,t_2)=Kx(t_1,t_2)\ Ky(t_1,t_2)+Kx(t_1,t_2)my(t_1)my(t_2)+\ Ky(t_1,t_2)mx(t_1)mx(t_2)$. **4.10** $Ky(t_1,t_2)=\frac{e^{-(t_1^2+t_2^2)}}{1+(t_1-t_2)^2}, D_y(t)=e^{-2t^2}$. **4.11** $mz(t)=4+t+t^2$, $Dz(t)=9+4t^{2.3.12}$ $\rho x(t_1,t_2)=\rho y(t_1,t_2)=\cos(t_{2-t1})$, $\rho xy(t_1,t_2)=\sin(t_{2-t1})$. **4.14** $mx(t)=0$, $Kx(t)= =(1/2)\cos(t_{2-t1})$. **4.17** *X(t) – нестаціонарна функція: mx(t)=mucos2t ≠ const.* **4.18** *X(t) – стаціонарна функція: mx(t)=0; Kx(t)=Dcos(t2-t1).* **4.20** *X(t) – нестаціонарна функція:* $mx(t)=a\int_0^{\pi/2}\sin(\omega t+\varphi)\cos\varphi d\varphi$. **4.22** $Dx(t)=a^2[0.5-(1/2e^2)^2]\cos^2\omega t+a^2[0.5-(1/e)-(1/2e^2)]\sin^2\omega t$.

4.25 $k_y(\tau)=16De^{-\alpha^2\tau^2}$. **4.28** *а)* $\rho x(\tau)=e^{-\tau^2}$ *; б)* $\rho x(\tau)=e-|\tau|(1+|\tau|)$.

4.2 Стаціонарно зв'язані випадкові функції

Стаціонарно зв'язаними називають дві випадкові функції *X (t)* і Y *(t)*, взаємна кореляційна функція яких залежить тільки від різниці аргументів $\tau=t_2—t_1$: $R_{xy}=r(\tau)$.

Дві будь-які стаціонарні функції не обов'язково стаціонарно зв'язані; з іншого боку, дві нестаціонарні функції можуть бути стаціонарно зв'язаними.

Задачі для самостійної роботи

4.29 Нехай *X(t)* процес із незалежними приростами. Довести, що дисперсія *Dx(t)* є не убутною функцією *t*.

4.30 Процес *N(t)* являє собою найпростіший пуасонівський потік відмов радіотехнічної системи з інтенсивністю *0,002* відмови в годину. Знайти ймовірність того, що а) за *100* годин настане не менш *3* відмов; б) за *200* годин роботи система зробить парне число відмов.

4.31 АТС обслуговує *6000* абонентів, кожний з яких у середньому займає лінію зв'язку протягом однієї хвилини в годину. Яке мінімальне число каналів *n* треба мати на АТС, щоб імовірність того, що число, що зробили протягом однієї хвилини викликів перевищить число каналів, була не більш *0,003*?

4.32 *X(t)* - пуасонівський процес із параметром λ. Описати умовний закон розподілу $P\{X(t_2) = m/X(t_1) = n\},\ m, n \in N;\ t_2 > t_1$.

4.33 Обчислити автоковаріаційну функцію процесу Пуассона *X (t)* з параметром *λ*.

4.34 Випадковий процес *X(t)* є величина інтервалу часу між двома послідовними стрибками пуасонівського процесу *N(t)* з параметром *λ*. Знайти одномірну щільність випадкового процесу *X(t)*.

4.35 Число відмов радіоелектронної апаратури являє собою пуасонівский потік з інтенсивністю *5·104* відмов у годину. Знайти ймовірність безвідмовної роботи апаратури протягом *200* годин, а також математичне сподівання й дисперсію часу безвідмовної роботи апаратури.

4.36 Випадковий процес $X^{(k)}(t)$ є величина інтервалу часу між n-*м* стрибком пуасонівського процесу з параметром *λ*, зареєстрованим у момент часу *t* і *(n + k)*-м стрибком того ж процесу. Знайти одномірну щільність випадкового процесу $X^{(k)}(t)$. Якому закону розподілу відповідає отримана щільність?

4.37 Довести, що взаємні кореляційні функції двох стаціонарно зв'язаних випадкові функцій *X(t)* і *Y(t)*, які взяти у різних порядках, пов'язані рівністю *rxy(τ)=ryx(τ)*.

4.38 Довести, що для стаціонарних і стаціонарно зв'язаних випадкових функцій *X(t)* і *Y(t)* абсолютна величина взаємної кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій цих функцій: $|r_{xy}(\tau)| \le \sqrt{D_x D_y}$.

4.39 Задано дві стаціонарні випадкові функції: *X(t)=cos(t+φ)* і *Y(t)=sin(t+φ)*, де φ - *випадкова* величина, розподілена рівномірно в інтервалі *(0,2π)*. Довести, що задані стаціонарні функції стаціонарно зв'язані.

4.40 Задані випадкові функції *X(t)=Vcost -Usint, Y(t) = Ucost + Vsint*, де *U* і V - *некорельовані* випадкові величини, причому їх математичні сподівання дорівнюють нулю, а дисперсії рівні *5*. Довести, що задані функції стаціонарны й стаціонарно зв'язані.

4.41 Задані стаціонарні випадкові функції: а) *X(t)=Usint+Vcost, Y(t)=Wsint+Vcost*, де *U, V, W* — некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями, які дорівнюють нулю, і дисперсіями, рівними *6*; б) *X(t)=Ucost+Vsint, Y (t)=Ucos2t+Vsin2t*, де *U* і V - *некорельовані* випадкові величини з математичними сподіваннями, рівними нулю, і дисперсіями, рівними 3. Чи є задані функції стаціонарно зв'язаними?

4.42 Задані стаціонарні й стаціонарно зв'язані випадкові функції *X(t)=Usin t +V cost, Y (t) =U cost +V sint,* де *U* і V – *некорельовані* випадкові величини з математичними сподіваннями, які дорівнюють нулю, і дисперсіями, які дорівнюють одиниці. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію заданих функцій.

Відповіді

4.30 *а) 1.15·10-3; б) 0.725.3.31 не менш 128.* **4.32** $P\{X(t_2)=m/X(t_1)=n\}=$
$$=\begin{cases} 0, m<n, \\ \dfrac{(\lambda(t_2-t_1))^{m-n}}{(m-n)!}\exp\{-\lambda(t_2-t_1)\}, n\le m. \end{cases}$$
4.33 $K_N(t_1,t_2)=\lambda\min(t_1,t_2)$, *урахувати що*

$$M[X(t_1)X(t_2)]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}P\{X(t_1)=n\}P(X(t_2)=m\mid X(t_1)=n).$$

4.34 $f_1(x/t)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ \lambda e^{-x\lambda}, x>0. \end{cases}$ **4.35** *P{X(t)≥200}≈0.9, mx=2·103, Dx=4·106.* **4.36**

$$f_1^{(k)}(x/t)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ \dfrac{(\lambda x)^{k-1}\lambda e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, x>0. \end{cases}$$
4.40 *mx(t)=my(t)=0,* $K_x=K_y=5\cos(t_2-t_1)$; $R_{xy}=5\sin(t_2-t_1)$. **4.41** *немає. а)* $R_{xy}=6\cos t_1\cos t_2$; *б)* $R_{xy}=3\cos(2t_2-t_1)$. **4.42** $\rho_{xy}(\tau)=\sin\tau$.

4.3 Кореляційна функція похідної від стаціонарної випадкової функції

Кореляційна функція похідної $X'(t)=\dot{x}$ *диференційованої стаціонарної випадкової функції X (t) дорівнює другій похідній від її кореляційної функції, яку беруть зі знаком мінус:*

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k_x^{''}(\tau).$$

Задачі для самостійної роботи

4.43 Довести, що якщо відома кореляційна функція $k_x(\tau)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції *X(t)*, то кореляційна функція її похідної $k_{\dot{x}}(\tau) = -k_x^{''}(\tau).$

4.44 Довести, що похідні будь-якого порядку (якщо вони існують) від стаціонарної випадкової функції також стаціонарні.

4.45 Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = 2e^{-0.5\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції *X (t).* Знайти: а) кореляційну функцію й дисперсію похідної *X'(t)=* $\dot{\chi}$ *;* б) Відношення дисперсій функції *X (t)* і її похідній.

4.46 Задана кореляційна функція $\dot{k}_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + +\alpha\,|\,\tau\,|),(\alpha > 0)$ стаціонарної випадкової функції *X(t).* Знайти: а) кореляційну функцію похідної *X'(t);* б) довести, що дисперсія похідної пропорційна параметру *D* і квадрату параметра *α.*

4.47 На вхід обладнання, що диференціює, подається стаціонарний випадковий *сигнал X(t*), кореляційна функція *якого* $kx(\tau)={}^{e-2}|\tau|(ch\ \tau\ +2sh\ \tau)$. Знайти: а) кореляційну функцію на виході обладнання; б) найбільше її значення.

4.48 Відома кореляційна функція *kx(τ)* стаціонарної випадкової функції *X(t).* Довести, що кореляційна функція другої похідної $k_{\ddot{x}}(\tau) = k_x^{IV}(\tau).$

4.49 Задані математичне сподівання *mx(t)=8* і кореляційна функція $kx(\tau)=5e^{-|\tau|}$ $[cos2\tau + 0{,}5\ sin2|\tau|]$ нормальної стаціонарної випадкової функції *X(t).* Знайти ймовірність того, що похідна *Y(t)=X'(t)* належить інтервалу *(0,10).*

4.50 Задані математичне сподівання $m_x=12$ і кореляційна функція $kx(\tau)=4e$-$|\tau|[cos2\tau+0{,}5sin2|\tau|]$ нормальної стаціонарної випадкової функції *X(t).* Знайти ймовірність того, що похідна Y(t)=X'(t) має значення, більші, ніж $\sqrt{5}$.

4.51 Задані математичне сподівання $m_x=6$ і кореляційна функція $k_x(\tau)= 10e$-$|\tau|[cos3\tau + (l/3)sin3|\tau|]$ нормальної стаціонарної випадкової функції *X(t).* Знайти щільність імовірності похідній *Y(t) = X' (t).*

4.52 На вхід обладнання, що диференціює, надходить випадковий процес із математичним сподіванням $mx(t)=^{3t}2+t$ і кореляційною $K_x(t_1,t_2)=\sigma^2 e^{-\alpha|t_1-t_2|}(1+\alpha\,|\,t_1-t_2\,|)$. функцією Чи є диференціюємим даний процес у середньоквадратичному? Знайти дисперсію процесу на виході обладнання, що диференціює.

4.53 Випадкова функція *X(t)* задана виразом *X(t)=Vcosωt*, де V - *випадкова* величина з характеристиками *mv=2, σV=3*. Знайти характеристики випадкової функції $Y(t)=X(t)+3\frac{dX(t)}{dt}$.

4.54 Кореляційна функція випадкового процесу *X(t)* має вигляд $K_X(t_1,t_2)=D_X e^{-\alpha(t_2-t_1)}\cos\beta(t_2-t_1),$ *α>0, β>0.* Визначити дисперсію похідної процесу *X(t).*

4.55 Відомі характеристики випадкового процесу: $mx(t)=3t^2+2t+1$, $K_X(t_1,t_2)=2e^{-(t_2-t_1)^2}$. Знайти математичне сподівання й дисперсію процесу $\mathrm{Y(t)=t\frac{dX(t)}{dt}+t^2}.$

4.56 Задана кореляційна функція *KX(t₁,t₂)* випадкового процесу *X(t)*. Показати, що взаємна кореляційна функція випадкових процесів *X(t)* і $\mathrm{Y(t)=\int_0^t X(s)ds}$ може бути представлена у вигляді $\mathrm{K_{XY}(t)=\int_0^{t_2} K_X(t_1,s)ds}$, а взаємна кореляційна функція процесів *X(t)* і $Z(t)=\frac{dX(t)}{dt}$ у вигляді $K_{XZ}(t_1,t_2)=\frac{d}{dt_2}K_X(t_1,t_2)$.

4.57 Задана кореляційна функція $K_X(t_1,t_2)$ двічі диференційованого випадкового процесу *X(t)*. Знайти кореляційну функцію зв'язку між процесами *X(t)* і *Y(t),* якщо *Y(t) = φ(t)X(t)+ψ(t)X''(t),* де *φ(t)* і *ψ(t)* - задані невипадкові функції часу.

Відповіді

4.45 *а)* $k_{\dot{x}}(\tau)=2e^{-0.5\tau^2}(1-\tau^2);$ $D_{\dot{x}}=2;$ *б)* $D_x/D_{\dot{x}}=1.$ **4.46** $k_{\dot{x}}=D\alpha^2e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha\,|\,\tau\,|).$ **4.47** *а)* $k_{\dot{x}}(\tau)=3e\text{-}2^{|\tau|}(ch\ \tau\text{-}2sh\ |\tau|);$ *б)* $k_{\dot{x}}(0)=3.$ **4.49** *P(0<Y<10)=0.4772.* **4.50** *P(*$\sqrt{5}$ *<Y<∞)=0.5-P(0<Y<*$\sqrt{5}$ *)=0.3085.* **4.51**

$f(y)=(1/10\sqrt{2\pi})e^{-(y^2/200)}$. **4.52** $D\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]=\sigma^2\alpha^2$. **4.53** *my(t)=2cosωt-6ωsinωt; Ky(t_1,t_2)=9(cosω$t_{1\text{-}3}$ωsinωt_1) (cosω$t_{2\text{-}3}$ωsinωt_2); Dy(t)=9(cosωt-3ωsinωt)*[2.3.54] $D\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]$*=(2α+β²)Dx.* **4.55** *my(t)=7t²+2t, Dy(t)=4t*[2.3.57] *Kxy(t_1,t_2)=φ(t_2)Kx(t_1,t_2) +ψt_2* $\frac{d^2}{dt_2^2}$ *Kx(t_1,t_2).*

4.4 Кореляційна функція інтеграла від стаціонарної випадкової функції

Кореляційну функцію й дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ від стаціонарної випадкової функції знаходять відповідно за допомогою формул:

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}(t_2-\tau)k_x(\tau)d\tau-\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau+\int_0^{t_1}(t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau,$$

$$D_y(t)=2\int_0^t(t-\tau)k_x(\tau)d\tau.$$

Задачі для самостійної роботи

4.58 Відома кореляційна функція $k_x(\tau)$ стаціонарної випадкової функції *X(t).* Довести, що дисперсія інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ рівна $D_y(t)=2\int_0^t(t-\tau)k_x(\tau)d\tau.$

4.59 Знайти дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, знаючи кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції
X(t): а) $kx(\tau)=1/(1+\tau^2)$; б) $kx(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(\alpha>0)$; в) $kx(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(l+\alpha|\tau|)$.

4.60 Задана кореляційна функція $kx(\tau)=10e^{-0.5|\tau|}(1+0{,}5|\tau|)$. Знайти відношення дисперсії випадкової величини $Y(t)=\int_0^{20} X(s)ds$ до дисперсії випадкової функції *X (t).*

4.61 Кореляційна функція випадкового процесу *X(t)* задана у вигляді $Kx(t_1,t_2)= t_1^2 + t_1t_2 + 2t_2^2$. Знайти взаємну кореляційну функцію $KXY(t_1, t_2)$ випадкових процесів *X (t)* і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

4.62 Коваріаційна функція випадкового процесу *X(t)* задана у вигляді $Kx(t_1,t_2)= t_1^2 + t_1t_2 + 2t_2^2$. Знайти взаємну коваріаційну функцію процесів *X(t)* і $Z(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$.

Відповіді

4.59 *а)* $Dy(t)=2t\ arctg\ t-ln(1+t^2)$; *б)* $Dy(t)=2D(\alpha t+e\text{-}\alpha t-1)/\alpha^2$; *в)* $Dy(t)=(2D/\alpha^2)[(\alpha t+3)e\text{-}\alpha t+(2\alpha t-3)]$. **4.60.** $Dy/kx(0)=136$.
4.61 $Kxy(t_1,t_2)= t_1^2\ t_2+0.5t_1t_2^2 + \frac{2}{3}t_2^3$. **4.62** $Kxz(t_1,t_2)=t_1+4t_2$.

4.5 Взаємна кореляційна функція диференційованої стаціонарної випадкової функції і її похідних

Припустимо, що $\tau=t_2 - t_1$.
Взаємні кореляційні функції стаціонарної випадкової функції X(t) і її похідних виражаються за допомогою формул:

$$r_{x\dot{x}}(\tau)=k_x^{'}(\tau); r_{\dot{x}x}(\tau)=-k_x^{'}(\tau); r_{x\ddot{x}}(\tau)=r_{\ddot{x}x}(\tau)=k_x^{''}(\tau),$$

$$r_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)=k_x^{'''}(\tau),$$

$$r_{\dddot{x}x}(\tau)=-k_x^{'''}(\tau); r_{x\dddot{x}}(\tau)=k_x^{'''}(\tau); r_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau)=-k_x^{'''}(\tau).$$

Задачі для самостійної роботи

4.62 Довести, що взаємна кореляційна функція диференційованої стаціонарної випадкової функції *X(t)* і її похідної $X'(t)=\dot{x}$ дорівнює перший похідної від кореляційної функції $kx(\tau)$, узятої зі своїм (протилежним) знаком, якщо індекс $\dot{x}$ стоїть на другому (першому) один по одному місці: а) $r_{x\dot{x}}(\tau)=k_x^{'}(\tau)$; б) $r_{\dot{x}x}(\tau)=-k_x^{'}(\tau)$.

4.63 Знайти взаємні кореляційні функції стаціонарної випадкової функції *X(t)* і її похідної , знаючи кореляційну функцію $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$.

4.64 Довести, що взаємна кореляційна функція стаціонарної випадкової функції *X(t)* і її похідної змінює знак при зміні місцями аргументів t_1 і t_2.

4.65 Відома кореляційна функція $k_x(\tau)$ стаціонарної функції *X(t)*. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції *X(t)* і її другої похідної.

4.66 Задана кореляційна функція $kx(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\ [1+\alpha|\tau| + +(\alpha^{2/3})\tau^2],\ \alpha>0,$ стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкової функції *X(t)* і її другої похідної.

4.67 Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=X(t) + X'(t)$, якщо відома кореляційна функція $kx(\tau)$ стаціонарної функції *X(t)*.

4.68 Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=X(t)+X'(t)$, знаючи кореляційну функцію $k_x(\tau) = e^{-\tau^2}$ стаціонарної функції *X(t)*.

4.69 Відома кореляційна функція стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти кореляційну функцію випадкової функції *Y(t)*, якщо: а) $Y(t)=X(t)+X''(t)$; б) $Y(t)=X'(t) + X''(t)$.

4.70 Відома кореляційна функція $kx(\tau)=e{-}|\tau|\ [1+|\tau|+(1/3)\tau^2]$ стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=X(t)+X''(t)$.

4.71 Відома кореляційна функція стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y (t) = X (t) + X' (t) + X'' (t)$.

4.72 Відома кореляційна функція стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції *X(t)* і її третьої похідної.

4.73 Відома кореляційна функція стаціонарної випадкової функції *X(t)*. Знайти взаємну кореляційну функцію першої й другої похідних.

Відповіді

4.63 $r_{x\dot{x}}(\tau) = -|\tau|\, e^{-|\tau|} sign\,\tau;\ r_{\dot{x}x}(\tau) = -r_{x\dot{x}}(\tau);$ де $sign\,\tau = \begin{cases} -1, при\,\tau < 0, \\ 0, при\,\tau = 0, \\ 1, при\,\tau > 0. \end{cases}$

4.65 $r_{x\ddot{x}}(\tau) = r_{\ddot{x}x}(\tau) = k_x''(\tau)$. **4.66** $r_{x\ddot{x}}(\tau) - (D\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}/3)(\alpha^2\tau^2 - \alpha|\tau| - 1)$.

4.67 ky(τ)=kx(τ)-k_x'' (τ). **4.68** ky(τ)-(3-4τ²)$e^{-\tau^2}$.

4.69 а) ky(τ)=kx(τ)+2$k_x''(\tau) + k_x^{IV}(\tau)$; б) ky(τ)=$-k_x''(\tau) + k_x^{IV}(\tau)$.

4.70 ky(τ)=(4/3)e-|τ|($\tau^{2-|\tau|}$+1). **4.71** $k_y(\tau) = k_x(\tau) + k_x''(\tau) + k_x^{IV}(\tau)$.

4.72. $r_{x\dddot{x}}(\tau) = k_x'''(\tau)$; $r_{x\dddot{x}}(\tau) = -k_x'''(\tau)$. **4.73** $r_{\dot{x}\ddot{x}}(\tau) = -k_x'''(\tau)$.

4.6 Спектральна щільність стаціонарної випадкової функції

Спектральною щільністю стаціонарної випадкової функції *X(t)* називають функцію *sx(ω),* яка пов'язана з кореляційною функцією *kx(τ)* взаємозворотними перетвореннями Фур'є:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-i\varpi\tau}d\tau, k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\varpi)e^{i\varpi\tau}d\omega.$$

Ці формули називають *формулами Вінера - Хинчина*. У дійсній формі вони являють собою взаємообернені косинус - перетворення Фур'є:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\varpi\tau d\tau, k_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} s_x(\varpi)\cos\tau\varpi d\omega.$$

Нормованою спектральною щільністю стаціонарної випадкової функції *X(t)* називають відношення спектральної щільності до дисперсії випадкової функції:

$$sx_{норм}(\omega) = sx(\omega)/Dx = sx(\omega)/\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\varpi)d\varpi.$$

Взаємною спектральною щільністю двох стаціонарних й стаціонарно зв'язаних випадкових функцій *X(t)* і *Y(t)* називають функцію $s_{xy}(\omega)$, обумовлену перетворенням Фур'є:

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau)e^{-i\varpi\tau}d\tau$$

Взаємна кореляційна функція виражається через взаємну спектральну щільність за допомогою зворотнього перетворення Фур'є:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\varpi)e^{i\varpi\tau}d\varpi$$

Задачі для самостійної роботи

4.74 Довести, що спектральна щільність стаціонарної випадкової функції є парна функція.

Вказівка. Використовувати формулу $s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\varpi\tau\, d\tau$

4.75 Довести, що, знаючи спектральну щільність стаціонарної випадкової функції *X(t)* можна знайти дисперсію цієї функції по формулі $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\varpi)d\varpi$.

4.76 Знайти дисперсію стаціонарної випадкової функції *X(t),* знаючи її спектральну щільність $sx(\omega)=10/\pi(1+\omega^2)$.

4.77 Довести, що, знаючи спектральну щільність диференційованої стаціонарної випадкової функції, можна знайти спектральну щільність її похідної по формулі $s_{\dot{x}}(\varpi) = \varpi^2 s_x(\varpi)$.

4.78 Задана спектральна щільність $sx(\omega)=\alpha^2/(\omega^2+\alpha^2)^2$, $(\alpha>0)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції *X(t).* Знайти дисперсію похідної *X' (t).*

4.79 Довести, що, знаючи спектральну щільність двічі диференційованої випадкової стаціонарної функції *X(t)* можна знайти спектральну щільність другої похідної *X'(t)* по формулі $s_{\ddot{x}}(\varpi) = \varpi^4 s_x(\varpi)$.

4.80 Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції *X(t),* знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=1-|\tau|$ при $|\tau|\leq 1$; кореляційна функція дорівнює нулю при $|\tau|> 1$.

4.81 Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції *X(t),* знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=1-(1/5)|\tau|$ при $|\tau|\leq 5$; кореляційна функція дорівнює нулю при $|\tau| > 5$.

4.82 Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=e{-}|\tau|$.

4.83 Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=De{-}\alpha|\tau|$, $(\alpha>0)$.

4.84 Знайти спектральну щільність стаціонарної випадкової функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=e$-$|\tau|$ $\cos\tau$.

4.85 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=De$-$\alpha|\tau|$ $\cos\beta\tau$, $(\alpha>0)$.

4.86 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=De$-$\alpha|\tau|$ $[\cos\beta\tau+(\alpha/\beta)\sin\beta|\tau|]$, $(\alpha>0)$.

4.87 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $k_x(\tau) = De^{-\alpha^2\tau^2}$

4.88 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=De$-$\alpha|\tau|(1+\alpha|\tau|)$ $(\alpha>0)$.

4.89 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=100e$-$0^{.1|\tau|}$ $(1+0.1\tau)$.

4.90 Знайти спектральну щільність стаціонарної функції, знаючи її кореляційну функцію $kx(\tau)=De$-$\alpha|\tau|$ $(1+\alpha|\tau|+(1/3)\alpha^2\tau^2)$ $(\alpha>0)$.
4.91 Знайти спектральну щільність випадкової функції $Y(t)=X(t)+X'(t)$, знаючи кореляційну функцію $kx(\tau)=De$-$\alpha|\tau|(1+\alpha|\tau|)$ $(\alpha>0)$ стаціонарної диференційованої випадкової функції $X(t)$.

4.92 Чи може функція $kx(\tau)=e|\tau|(1+|\tau|+\tau^2)$ бути кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції $X(t)$?

4.93 а) Довести, що функція $k_x(\tau) = 5e^{-2\tau^2}$ може бути кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції $X(t)$. б) Довести методом від противного, що не існує такої стаціонарної функції, кореляційна функція якої зберігає постійне значення в інтервалі $(—\tau_1,\tau_1)$, симетричному відносно початку координат, і яка дорівнює нулю поза цим інтервалом.

4.94 Задана спектральна щільність $sx(\omega)=10\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$ $(\alpha>0)$ стаціонарної випадкової функції. Знайти нормовану спектральну щільність.

4.95 Задана спектральна щільність $sx(\omega)=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$ $(\alpha>0)$ стаціонарної випадкової функції. Знайти спектральну функцію $Sx(\omega)=\int_{-\infty}^{\varpi} s_x(\varpi)d\varpi$.

4.96 Довести, що спектральна щільність дорівнює похідній від спектральної функції: $s_x(\omega) = S'_x(\omega)$.

4.97 Довести, що для стаціонарних і стаціонарно зв'язаних випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ слушне співвідношення, що зв'язує взаємні спектральні щільності: $s_{xy}(-\omega)=s_{yx}(\omega)$.

4.98 Довести, що взаємні спектральні щільності диференційованої стаціонарної випадкової функції та її похідні зв'язані рівністю $s_{x\dot{x}}(\varpi) = -s_{\dot{x}x}(\varpi)$.

4.99 Довести, що, знаючи спектральну щільність $s_x(\omega)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$, можна знайти взаємну спектральну щільність функції $X(t)$ і її похідній по формулі $s_{x\dot{x}}(\varpi) = i\varpi s_x(\varpi)$.

4.100 Відома спектральна щільність $s_x(\omega)= =2D\alpha^3/\pi(\alpha^2+\omega^2)^2$ $(\alpha>0)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти взаємну спектральну щільність функції $X(t)$ і її похідній.

4.101 Знайти взаємну спектральну щільність диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ і її похідної, знаючи кореляційну функцію $k_x(\tau) = 2e^{-\tau^2}$.

4.102 Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції $X(t)$, знаючи її спектральну щільність $s_x(\omega)=s_0$ в інтервалі $-\omega_0 \le \varpi \le \omega_0$; поза цим інтервалом $s_x(\omega) = 0$.

4.103 Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції, знаючи її спектральну щільність: $s_x(\omega)=s_0$ в інтервалах $(-2\omega_0, -\omega_0)$ і $(\omega_0, 2\omega_0)$; поза цими інтервалами $s_x(\omega) = 0$.

4.104 Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції, знаючи її спектральну щільність $s_x(\omega)=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$.

4.105 Знайти кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції, знаючи її спектральну щільність $s_x(\omega) = 2/\pi(4+\omega^2)$.

4.106 Знайти кореляційну функцію стаціонарного білого шуму стаціонарної випадкової функції з постійною спектральною щільністю $s_x(\omega) = s_0$.

Відповіді

4.76 *Dx=10.3.78* $D_{\dot{x}} = \pi\alpha^2/2$. **4.80** *sx(ω)=2sin²(ω/2)/πω²*.3.81 *sx(ω)= =2sin²(5ω/2)/5πω²*.3.82 *sx(ω)=1/π(1+ω²)*. **4.83** *sx(ω)=Dα/π(α²+ω²)*. **4.84** *sx(ω)=(2+ω²)/π[1+(1-ω)²][1+(1+ω)²]*. **3.85** *sx(ω)=(Dα/π)·(ω²+α²+β²)/ [(ω--β)²+α²] [(ω+β)²+α²]*. **4.86** *sx(ω)=(2Dα/π)·(α²+β²)/[(ω²α²+β²)²⁻⁴β²ω²]*.
4.87 $s_x(\varpi) = De^{-(\varpi^2/4\alpha^2)} / \alpha\sqrt{2\pi}$. **4.88** *sx(ω)=2Dα³/π(α²+ω²)²*.3.89 *sx(ω)= =(1/5)/(ω²+0.01)²π*. **4.90** *sx(ω)=8Dα^{5/3}π(α²+ω²)³*.3.91 *sx(ω)=2Dα³(1+ω²)/ /π(α²+ω²)²*.3.92 *немає*. **4.94** *sx* $_{норм}$*(ω)=α/π(α²+ω²)*. **4.95** *Sx(ω)= =D[(1/π)arctg(ω/α)+0.5]*. **4.100** $s_{x\dot{x}}(\varpi)$ *=iω2Dα³/π(ω²+α²)²*.3.
4.101 $s_{x\dot{x}}(\varpi) = (i\varpi/\sqrt{\pi})e^{-(\varpi^2/4)}$. **4.102** $k_x(\tau)=2s_0(\sin\omega_0\tau)/\tau$.
4.103 $k_x(\tau)=(2s_0\sin\omega_0\tau)(2\cos\omega_0\tau-1)/\tau$. **4.104** $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}$. **4.105** $k_x(\tau)=e^{-2|\tau|}$.
4.106 $k_x(\tau)=2\pi s_0\delta(\tau)$.

4.7 Перетворення стаціонарної випадкової функції стаціонарною лінійною динамічною системою

Стаціонарною лінійною динамічною системою називають перетворення, яке описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами

$$[a_0Y^{(n)}(t)+a_1Y^{(n-1)}(t)+...+a_n]Y(t) = [b_0X^{(m)}(t)+b_1X^{(m-1)}(t)+...+b_m]X(t),$$

де *X (t)* - вхідна стаціонарна випадкова функція (вплив, збурювання), *Y (t)* - вихідна випадкова функція (реакція, відгук). Якщо динамічна система стійка, то при досить великих значеннях *t*, тобто по закінченню перехідного процесу, функцію *Y(t)* можна вважати стаціонарною.
Математичне сподівання вихідної функції *Y(t)* знаходять по формулі $m_y=(b_m/a_n)m_x$, де m_x - *математичне* сподівання вхідної функції *X(t)*.
В операторному вигляді останнє рівняння має вигляд

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+ \ ... \ +a_n)Y(t)= (b_0p^m+b_1p^{m-1}+ \ ... \ +b_m)X(t).$$

Передатною функцією лінійної динамічної системи називають відношення многочлена відносно *p* при *X(t)* до многочлена при *Y (t)* в операторному рівнянні:

$$\Phi(p)= (b_0p^m+b_1p^{m-1}+ \ ... \ +b_m)/ (a_0p^n+a_1p^{n-1}+ \ ... \ +a_n).$$

Частотною характеристикою лінійної динамічної системи називають функцію, яка отримується заміною аргументу *p* у передатній функції на аргумент *iω* (ω - *дійсне* число):

$$Ф(i\omega)\ (b_0(i\omega)^m+b_1(i\omega)^{m-1}+\ ...\ +bm)/\ (a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\ ...\ +an).$$

Спектральні щільності вихідної і вхідної функцій зв'язані рівністю $sy(\omega)=sx(\omega)\cdot|Ф(i\omega)|^2$, тобто, щоб знайти спектральну щільність вихідної функції, треба помножити спектральну щільність вхідної функції на квадрат модуля частотної характеристики. Знаючи ж спектральну щільність вихідної функції, можна знайти її кореляційну функцію

$$k_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_y(\varpi)e^{i\tau\varpi}d\omega,$$

а, отже, і дисперсію

$$D_y=k_y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s_y(\varpi)d\omega.$$

Задачі для самостійної роботи

4.107 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням $Y'(t)+2Y(t) = 5X'(t) + 6X(t),$ подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$ з математичним сподіванням $m_x=5$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в, що встановився режимі (після загасання перехідного процесу).

4.108 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням $Y''(t) + 3Y'(t) + 5Y(t)= 4X'(t) + 10X(t)$ подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$ з математичним сподіванням $m_x=2$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в, що встановився режимі.

4.109 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням $3Y(t) + Y(t)= 4X'(t)+ X(t),$ подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$ з кореляційною функцією $kx(\tau)=6e^{-2|\tau|}$. Знайти дисперсію випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в, що встановився режимі.

4.110 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням $Y'(t)+3Y(t)=X'(t)+4X(t)$, подається стаціонарна випадкова функція $X(t)$ з математичним сподіванням $mx=6$ і кореляційною функцією $kx(\tau)=5e^{-2|\tau|}$. Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію випадкової функції $Y(t)$ на виході системи в, що встановився режимі.

4.111 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням *Y'' (t) + 5Y' (t) + 6Y (t) = X'(t) + X(t),* подається стаціонарна випадкова функція з математичним сподіванням $m_x=4$ і кореляційною функцією $kx(\tau) = e^{-|\tau|}$. Знайти: а) математичне сподівання; б) спектральну щільність випадкової функції *Y(t)* на виході системи в, що встановився режимі.

4.112 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням *Y'''(t)+ 6Y'' (t)+11Y'(t)+6Y(t)=7X''(t)+ +5X(t),* подається стаціонарна випадкова функція *X(t)* з відомою кореляційною функцією: а) $kx(\tau) = 4e^{-|\tau|}$; б) $kx(\tau) = 2e^{-|\tau|}$. Знайти спектральну щільність випадкової функції *Y(t)* на виході системы в режимі, що встановився.

4.113 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням *Y'(t)+Y(t)=X(t)*, надходить стаціонарна випадкова функція *X(t)* з постійною спектральною щільністю s_0 (білий шум). Знайти дисперсію випадкової функції *Y(t)* на виході системи в, що встановився режимі.

4.114 На вхід лінійної стаціонарної динамічної системи, яка описується рівнянням $Y''(t) +2hy'(t)+k^2Y(t)=X(t)$ $(h>0),$ $k\geq h)$, надходить стаціонарна випадкова функція *X(t)* з постійною спектральною щільністю s_0 (білий шум). Знайти спектральну щільність випадкової функції *Y(t)* на виході системи в, що встановився режимі.

4.115 Спроектовано дві лінійні стаціонарні динамічні системи, на вхід яких надходить стаціонарна випадкова функція *X(t)*. Передатні функції систем відповідно рівні: $\Phi_1(p)=(4p+1)/(3p+1),$ $\Phi_2(p)=(p+1)/(3p+1).$ Спектральна щільність вихідної функції відома: $sx(\omega)=12/\pi(\omega^2 + 4)$. Яка із систем забезпечує найменшу дисперсію вихідної функції?

Відповіді

4.107 *my=15.3.* **4.108** *my=4.* **4.109** *Dy=10.***4.110** **а**) *my=8; б) Dy=22/3.* **4.111** *а) my=2/3; б)* $sy(\omega)=(1/\pi)[1/25\omega^2+(6-\omega^2)^2]$. **4.112** *а)* $sy(\omega)=4(5-7\omega^2)^2/$ $/\pi(\omega^2+1)^2(\omega^2+4)$ (ω^2+9); *б)* $sy(\omega)=4(5-7\omega^2)^{2/}\pi(\omega^2+1)^3(\omega^2+4)$ (ω^2+9). **4.113** $Dy=s_0\pi$. **4.114** $sy(\omega)=s_0/(k^{2-\omega 2})^2+4h^2\omega^{2.}$ **4.115** *Друга система:* $Dy_1=10$; $Dy_2=10/7$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. − М. : Академия, 2003.
2. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с.
3. Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладов. – К. : КНЕУ, 2005. – 256 с.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.
5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
6. Жлуктенко, В. І. Стохастичні моделі в економіці: монографія / В.І.Жлуктенко, А. В.Бєгун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с.
7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С.С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с.
8. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 351 с.
9. Максимов О. В. Елементи теорії масового обслуговування : навча- льний посібник / О. В. Максимов, М. О. Рашевський. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2004. – 147 с.
10. Сеньо П. С. Випадкові процеси : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с.
11. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : під- ручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
12. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.