

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# Механіка

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання лабораторних робіт з фізики  
для студентів технічних спеціальностей  
денної та заочної форм навчання

Обговорено і рекомендовано на засіданні  
кафедри інформаційно-вимірювальних тех-  
нологій, метрології та фізики  
протокол № 3 від 20.11.2013 р

**Чернігів ЧДТУ 2014**

Механіка. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання /Укл.: Ушаков В.Г. – Чернігів: ЧНТУ, 2014. – 36 с.

Укладач: Ушаков Віктор Григорович, кандидат технічних наук,  
старший викладач

Відповідальний за випуск: Приступа А. Л., завідувач кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, метрології та фізики, кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: Грицюк В.Ю., кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Чернігівського національного технологічного університету

©ЧНТУ, 2014

© ІВТМФ, 2014

## ЗМІСТ

Вступ	
Загальні вимоги до виконання лабораторних робіт .....	4
Обробка результатів вимірювань .....	6
1 Лабораторна робота №1	
Визначення густини тіл правильної форми .....	9
2 Лабораторна робота № 2	
Визначення моменту інерції тіла (маятника Обербека) за допомогою основного рівняння динаміки обертального руху тіла .....	15
3 Лабораторна робота № 3	
Визначення моменту інерції маховика динамічним методом .....	20
4 Лабораторна робота № 4	
Визначення коефіцієнта динамічної в'язкості рідини методом Стокса ...	24
5 Лабораторна робота № 5	
Вивчення законів кінематики поступального руху на машині Атвуда ...	27
6 Лабораторна робота № 6	
Визначення швидкості польоту кулі методом крутильного балістичного маятника .....	30
Рекомендована література .....	34
Додаток А – Зразок оформлення титульної сторінки звіту про виконання лабораторних робіт .....	35
Додаток Б – Коефіцієнти Стьюдента .....	36
Додаток В – Розрахунок жорсткості підвісу при крученні .....	36

## ВСТУП

### Загальні вимоги до виконання лабораторних робіт

Мета лабораторного практикуму з фізики, разом з лекціями та практичними заняттями, полягає у поглибленні теоретичних знань, оволодінні основними методами і навиками експериментування із застосуванням вимірювальних приладів, а також в опануванні правил математичної обробки результатів експерименту.

Успішне виконання лабораторних робіт у значній мірі залежить від правильної організації методики їх проведення. Виконання будь-якого лабораторного завдання складається з попередньої теоретичної підготовки, проведення лабораторного експерименту та обробки результатів експерименту.

Лабораторні роботи виконуються за розкладом занять, тому кожний студент заздалегідь знає послідовність та терміни виконання робіт протягом семестру і має можливість вчасно підготуватися до них. Перш за все слід ознайомитись з описом роботи, її теоретичним обґрунтуванням, звертаючи особливу увагу на доведення розрахункових (робочих) формул. Найбільш важливі теоретичні положення, доведення основних формул, порядок виконання вимірювань слід законспектувати у протоколі лабораторної роботи.

Наприкінці підготовки треба вміти відповісти на контрольні запитання, які сприяють більш глибокому розумінню змісту лабораторної роботи, а отже і її свідомому, якісному виконанню.

Без належної попередньої підготовки студент до виконання лабораторної роботи не допускається.

*Під час виконання лабораторних робіт слід дотримуватись таких правил:*

- 1) студенти починають виконувати лабораторні роботи лише з дозволу керівника заняття. Без перевірки викладачем або лаборантом готовності студента до роботи починати вимірювання не дозволяється;
- 2) не можна брати без дозволу прилади з інших робочих місць;
- 3) результати вимірювань заносяться до таблиць, форму яких слід заздалегідь продумати. Величини, які при вимірюваннях залишаються сталими (константи, параметри приладів тощо) записують у примітках до таблиці;
- 4) після закінчення вимірювань, не розбираючи установки (схеми), слід одразу ж обчислити кінцевий результат і показати розрахунки викладачу. Якщо вони будуть незадовільні, вимірювання і розрахунки треба повторити. За умови отримання правильного результату лабораторна робота вважається виконаною;
- 5) при складанні заліку з лабораторної роботи студент повинен подати оформлений протокол (звіт) про виконання роботи, в якому, крім даних попередньої підготовки, мають бути первісні дані експерименту (таблиця), кінцеві

## Механіка

показники експерименту (розрахункові результати, графіки, розрахунки абсолютної і відносної похибок), правильно записаний результат вимірювань та основні висновки.

*Повністю оформлена лабораторна робота має бути подана викладачеві не пізніше наступного (чергового) заняття.*

Лабораторна робота оформлюється відповідно до вимог [1] Державного стандарту України ДСТУ 3008-95 (Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення).

Лабораторна робота оформлюється чорнилом (пастою) з одного боку аркуша формату А4 (297×210 мм). Поля: ліве – 25 мм, праве – не менше 10 мм, верхнє та нижнє – 20 мм.

На першій сторінці вказується номер лабораторної роботи, її назва, прізвище та ініціали виконавця, номер групи.

Схеми, рисунки та графіки виконуються олівцем. Скорочення слів в тексті, крім загальноприйнятих, не дозволяється.

Для побудови графіків слід користуватися папером з масштабною сіткою (міліметрівка або аркуш у клітинку). При цьому слід насамперед раціонально вибрати масштаб, а саме – експериментальна крива має бути не дуже крутою і не дуже пологою, бо на таких кривих важко робити відліки. Потрібно намагатися використовувати всю площу графіка, тому в багатьох випадках відлік масштабних поділок на координатних осях доцільно починати не з нуля, а з деякого значення, трохи меншого від одержаних експериментальних значень. При виборі масштабу слід пам'ятати, що згідно з вимогами стандарту одна поділка шкали має відповідати лише 0,1; 0,2; 0,5 або 1; 2; 5, або 10; 20; 50 і т.д. одиницям вимірюваної величини, але ні в якому разі не 2,5; 3; 4; 7 тощо. На шкалі, як правило, наносять лише “круглі” мітки. Наприклад, 0,5; 1; 1,5; 2 і т.д. На кінцях координатних осей (шкал) наносять позначення величин, які відкладаються, і відповідні одиниці виміру.

Точки і лінії наносять на графік чітко і ясно олівцем, бо інакше помилково нанесену точку не можна усунути з графіка, не зіпсувавши його. Ніяких дрюгрядних ліній і відміток, які пояснюють побудову точок, на графік наносити не можна, оскільки вони заважають користуватися графіком і аналізувати результати.

Наприкінці семестру усі захищені і підписані викладачем роботи студент зшиває у єдиний загальний «Звіт про виконання лабораторних робіт...», який надалі зберігається на кафедрі. На титульній сторінці Звіту, форма якої наведена нижче (дивись *Додаток А*), вказуються назва розділу курсу, прізвище та ініціали студента, номер групи, прізвище та ініціали викладача (керівника), а також дата, коли Звіт був поданий викладачеві.

## Обробка результатів вимірювань

При будь-яких вимірюваннях фізичної величини, як би старанно їх не проводити, неминучі похибки, тобто виміряти величину абсолютно точно неможливо. Причиною похибок є недосконалість методів і засобів вимірювань, неповнота наших знань або труднощі врахування усіх факторів, які зумовлюють перебіг певного явища, а також обмежені можливості наших органів чуттів та інші причини.

Важливо усвідомити, що фізика є точною наукою не тому, що вимірювання фізичних величин абсолютно точні – цього досягти взагалі неможливо, а тому, що в кожному окремому випадку можна вказати граничні значення, між якими перебуває вимірювана величина. Йдеться про надійні межі похибки результату вимірювання – верхню і нижню межі інтервалу, який накладає із заданою ймовірністю похибку вимірювання.

Розглянемо приклад. Нехай в результаті повторюваних однакових за точністю  $n$ -кратних вимірювань деякої фізичної величини  $X$  одержано послідовність значень:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$$

Середнім арифметичним значенням вимірюваної величини  $X$  будемо називати величину

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

При  $n \rightarrow \infty$  істинне значення фізичної величини  $X$  дорівнює середньому арифметичному. Тоді  $X = \bar{x}$ .

У реальній практиці число вимірювань  $n$  є величиною скінченою  $n \neq \infty$ . Через це обробка результатів вимірювань зводиться до оцінки ступеня наближення вимірюваного значення до істинного.

Розсіяння, або розкид, виміряних значень  $x_i$  відносно  $\bar{x}$  характеризують величиною середньої квадратичної (або стандартної) похибки:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2},$$

а також стандартним відхиленням:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2}. \quad (2)$$

Чим більші  $S$  і  $S_{\bar{x}}$ , тим менш точні вимірювання.

Для оцінки точності результату вимірюваного значення фізичної величини використовують такі характеристики, як надійний інтервал та граничну (надійну) похибку середнього арифметичного.

## Механіка

*Надійний інтервал* – це інтервал, який містить істинне значення  $X$  вимірної фізичної величини із заданою ймовірністю  $p$ , яка називається *надійною ймовірністю* (або коефіцієнтом надійності), тобто

$$\bar{x} - \Delta x \leq X \leq \bar{x} + \Delta x$$

з ймовірністю  $p$ , де  $\Delta x$  – *абсолютна* (або *гранична*) похибка вимірювання.

При заданих  $n$  і  $p$  абсолютну похибку можна знайти за формулою

$$\Delta x = t(p, n) \cdot S_{\bar{x}}, \quad (3)$$

де  $S_{\bar{x}}$  – стандартне відхилення, розраховане за формулою (2);  $t(p, n)$  – коефіцієнт Стюдента, який береться із таблиці (дивись *Додаток Б*);  $n$  – число вимірювань, що обробляються.

Отже коефіцієнт Стюдента, а разом з ним і гранична похибка залежать від надійної ймовірності  $p$  та кількості вимірювань  $n$ .

Якщо надійний інтервал збільшується, то зростає надійність (ймовірність) того, що істинне значення величини попаде в розглянутий інтервал. Надійну ймовірність прийнято задавати такою, що дорівнює 0,80; 0,90; 0,95; 0,98; 0,99.

Поряд з абсолютною похибкою (граничним відхиленням) точність результату вимірювань характеризує також *відносна похибка* вимірювань, яка дорівнює відношенню абсолютної похибки (3) до середнього арифметичного значення (1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}}. \quad (4, a)$$

Вона може бути виражена також у процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (4, б)$$

Після обробки і округлення експериментальних даних кінцевий результат вимірювань подають у вигляді

$$X = \bar{x} \pm \Delta x \dots; \varepsilon = \dots\%; p = \dots; n = \dots.$$

Наприклад:

*швидкість*  $v = 7,26 \pm 0,04 \text{ м/с}; \varepsilon = 0,6\%; p = 0,95; n = 6$

або

*густина*  $\rho = 7,8 \pm 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \varepsilon = 10\%; p = 0,90; n = 5.$

**При округленні результатів вимірювань слід дотримуватись таких правил:**

- а) величина граничної (абсолютної) похибки  $\Delta x$  округлюється до першої значущої цифри<sup>1</sup> в усіх випадках, крім таких, коли першою значущою цифрою є одиниця. В останньому випадку при округленні зберігають дві значущі цифри;

<sup>1</sup> Першою значущою цифрою при чисельному представленні величини вважається *перша зліва* цифра, не рівна нулю. Наприклад, для величини 3,245 першою значущою буде цифра 3; для величини 0,00279 першою значущою буде цифра 2. Перша значуща цифра дає найбільший внесок у величину, яка розглядається.

## Механіка

б) величина  $\bar{x}$  округлюється до такого ж ступеня точності, як і  $\Delta x$ , тобто обидві величини –  $\bar{x}$  і  $\Delta x$  – треба вказувати з однаковою точністю.

Наприклад, в результаті обробки вимірювань одержано величини  $\bar{x} = 0,03782$  та  $\Delta x = 0,00674$ . У цьому випадку  $\Delta x$  має першу значущу цифру “6” у третьому розряді після коми. Округляємо  $\Delta x \approx 0,007$ . Після цього округляємо до такого ж ступеня точності основний результат:  $\bar{x} \approx 0,038$ . Правильно записаний результат вимірювань буде мати вигляд:  $X = (0,038 \pm 0,007)$ , або краще  $X = (3,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-2}$ .

Інші приклади:

<i>Одержано величини</i>		<i>Правильно записаний результат</i>
$\bar{x}$	$\Delta x$	$X = \bar{x} \pm \Delta x$
0,2963	0,0321	$X = 0,30 \pm 0,03$
7682	147	$X = 7680 \pm 150$ , або $X = (7,68 \pm 0,15) \cdot 10^3$
0,2682	0,0362	$X = 0,27 \pm 0,04$ , або $X = (2,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-1}$



# 1 Лабораторна робота №1

## ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТІЛ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ

Прилади і приладдя:

- 1) тіла правильної геометричної форми: паралелепіпед, циліндр, куля тощо;
- 2) технічні терези з важками;
- 3) штангенциркуль;
- 4) мікрометр.

### 1.1 Теоретичні відомості

Об'ємна густина. Густиною (об'ємною густиною)  $\rho$  називається величина, яка вимірюється масою речовини в одиниці об'єму тіла:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1.1)$$

де  $m$  – маса тіла;  $V$  – його об'єм.

Якщо густини, розраховані за формулою (1.1) для усього тіла і для будь-якої частини цього тіла будуть однакові, то таке тіло називають *однорідним*.

І навпаки, якщо густини для різних частин тіла не однакові, то таке тіло називають *неоднорідним*.

Густина неоднорідної речовини в точці з координатами  $(x, y, z)$  – є границя відношення маси  $\Delta m$  речовини у малому об'ємі  $\Delta V$  в околі обраної точки до об'єму  $\Delta V$ , коли об'єм стягується до даної точки  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (1.1, a)$$

Отже, для однорідного тіла його густина має однакові значення в усіх точках:  $\rho_{x, y, z} = const$ . Для неоднорідного тіла густина змінюється від точки до точки:  $\rho_{x, y, z} \neq const$ , тобто залежить від координат  $x, y, z$  точки.

Маса тіла з відомою густиною визначається, виходячи з (1.1) і (1.1, а):

для однорідного тіла  $m = \rho V$ ;

для неоднорідного тіла  $m = \int_V dm = \int_V \rho(x, y, z) dV$ ,

де інтегрування проводиться по об'єму тіла.

У певних випадках поряд з об'ємною густиною тіла користуються *поверхневою* густиною тіла або *лінійною* густиною.

**Поверхнева густина.** Поверхневою густиною зручно користуватися, якщо форма тіла є такою, що один з розмірів тіла набагато менший двох інших розмірів, наприклад, пластини, листи, плівки тощо. Для однорідних поверх-

## Механіка

хонь (маса рівномірно розподілена по поверхні) поверхнева густина  $\sigma$  вимірюється масою в одиниці площі поверхні тіла:

$$\sigma = \frac{m}{S}, \quad (1.2)$$

де  $m$  – маса тіла;  $S$  – його площа.

При нерівномірному розподілі речовини по поверхні тіла поверхнева густина буде змінюватись, тобто буде залежати від координат точки на поверхні тіла. Поверхнева густина тіла в точці з координатами  $(x, y, z)$  визначається аналогічно (1.1, а), тобто

$$\sigma(x, y, z) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}. \quad (1.2, a)$$

Маса тіла у цьому випадку дорівнює:

$$\begin{aligned} \text{для однорідного тіла} \quad & m = \sigma S; \\ \text{для неоднорідного тіла} \quad & m = \int dm = \int_S \sigma(x, y, z) dS. \end{aligned}$$

**Лінійна густина.** Розглядаючи тіла, один з розмірів яких набагато більший двох інших (рейки, дроти, стрічки, волокна), можна характеризувати розподіл речовини вздовж таких тіл лінійною густиною, тобто масою в одиниці довжини. Очевидно, для однорідних тіл довжиною  $l$  лінійна густина  $\tau$  дорівнює:

$$\tau = \frac{m}{l}, \quad (1.3)$$

де  $m$  – маса тіла;  $l$  – його довжина.

Лінійна густина неоднорідного тіла в точці з координатами  $(x, y, z)$ :

$$\tau_{x, y, z} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}. \quad (1.3, a)$$

Маса таких тіл, якщо їх лінійна густина відома, знаходиться за формулами:

$$\begin{aligned} \text{для однорідних тіл} \quad & m = \tau l; \\ \text{для неоднорідних тіл} \quad & m = \int dm = \int_L \tau_{x, y, z} dl. \end{aligned}$$

При необхідності поверхневу або лінійну густина тіл, розміри яких відомі, легко виразити через їх об'ємну густина, і навпаки.

**Середня густина.** Розглядаючи *неоднорідні* тіла, у тих випадках, коли детальний розподіл густини речовини у межах тіла не відомий (або не суттєвий для задачі, що розглядається), користуються поняттям середньої густини. *Середня густина* неоднорідних тіл визначається за формулами (1.1), (1.2), (1.3):

$$\rho_c = \frac{m}{V} \text{ – середня об'ємна густина; } \sigma_c = \frac{m}{S} \text{ – середня поверхнева}$$

густина;  $\tau_c = \frac{m}{l}$  – середня лінійна густина. Тобто середньою густиною (об'ємною, поверхневою або лінійною) неоднорідного тіла називається густина такого *однорідного* тіла, яке при тих самих розмірах і формі матиме таку саму масу, як і дане неоднорідне тіло.

## 1.2 Експериментальна частина

Для визначення густини тіл необхідно знати їх масу, а також об'єм, площу або довжину.

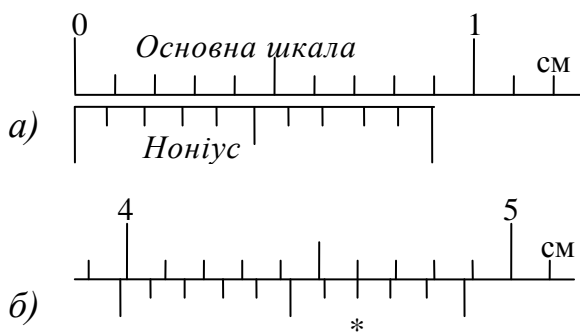
Об'єм, площа, довжина вимірюються безпосередньо, а для тіл правильної геометричної форми – розраховуються за відомими з курсу геометрії формулами. Масу знаходять зважуванням.

### 1.2.1 Визначення лінійних розмірів тіла

Для безпосередніх вимірювань довжини широко використовуються масштабна лінійка, штангенциркуль, мікрометр та ін.

Ціна поділки масштабної лінійки становить  $1 \text{ мм}$ . Отже точність вимірювань лінійкою не перевищує ціни поділки, тобто  $\pm 1 \text{ мм}$ .

**Штангенциркуль.** Для більш точних вимірювань користуються приладами з *ноніусом*, наприклад, штангенциркулем. Ноніусом називають допоміжну рухому шкалу, по якій відраховують долі поділок основної шкали, що дає змогу підвищити точність вимірювань до  $0,1 \text{ мм}$  або  $0,05 \text{ мм}$ .



$$\text{Відлік: } (39 + 7 \cdot 0,1) = 39,7 \text{ мм}$$

Рисунок 1.1– Вимірювальні шкали штангенциркуля: а)– основна шкала та шкала ноніуса; б)– приклад відліку

Ноніус штангенциркуля для вимірювань з точністю до  $0,1 \text{ мм}$  являє собою шкалу довжиною  $9$  або  $19 \text{ мм}$ , поділену на десять рівних частин (рисунок 1.1, а). Тому одна поділка ноніуса дорівнює  $0,9$  або  $1,9 \text{ мм}$ , тобто на  $0,1 \text{ мм}$  менше від поділки основної шкали масштабної лінійки.

Коли при вимірюванні нульова відмітка (штрих) шкали ноніуса буде між певними відмітками основної шкали, то це означатиме, що до цілого числа міліметрів треба додати  $x$  десятих часток міліметра. Будова ноніуса ґрунтується на тому, що людське око легко розрізняє, чи є два штрихи продовженням один одного, чи вони дещо зсунуті. Порядковий номер мітки ноніуса, яка збігається з яким-небудь штри-

хом основної шкали, дає безпосередньо число  $x$  десятих часток міліметра. На *рисунку 1.1, б* наведено приклад, з якого бачимо, що нульовий штрих ноніуса знаходиться між позначками 39 та 40 мм основної шкали, а сьомий штрих ноніуса збігається з одним із штрихів основної шкали, тобто відлік буде 39,7 мм.

Штангенциркуль складається зі штанги 1 з основною шкалою 2, у якої ціна поділки 1 мм, рухомої рамки 3 зі шкалою ноніуса 4, затискачем рамки 5, двох пар губок для внутрішніх 6 та зовнішніх 7 вимірювань (*рисунком 1.2*).

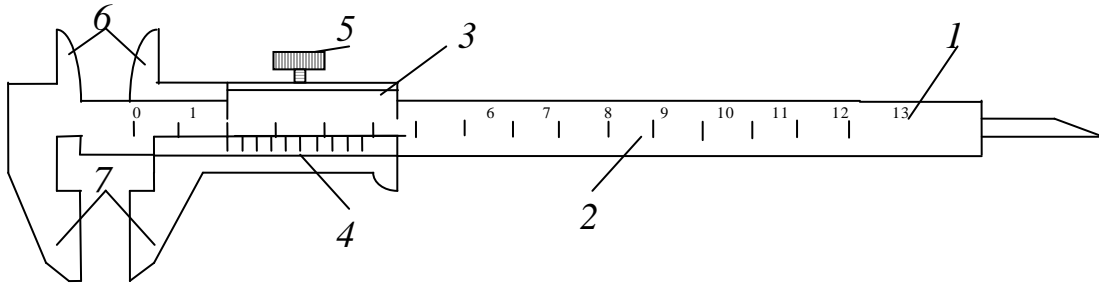


Рисунок 1.2– Будова штангенциркуля

Визначення розмірів штангенциркулем зводиться до визначення відстані, на яку зрушилась нульова поділка шкали ноніуса вздовж основної шкали, якщо вимірювальні поверхні губок щільно прилягають до об'єкту вимірювання зовні, або щільно увійшли у внутрішню частину деталі.

Мікрометр застосовується для вимірювання невеликих розмірів з точністю до 0,01 мм. Мікрометр складається з скоби 1, в яку запресована п'ятка 2, стебла 3, в який закручується мікрометричний гвинт 4, барабана 5, тріскачки 6 і стопорного гвинта 7 (*рисунком 1.3*).

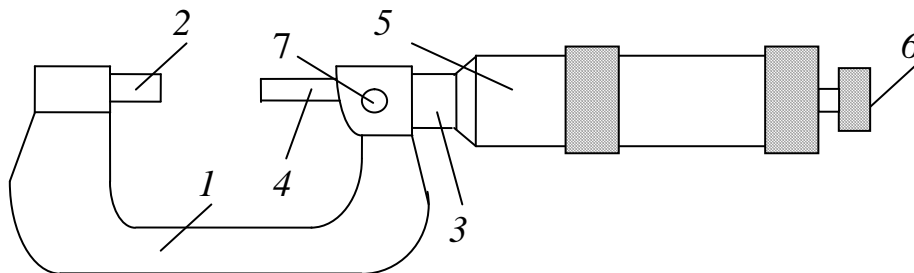


Рисунок 1.3– Будова мікрометра

Стебель має шкалу з поділками 0,5 мм, які розміщені зверху і знизу поздовжньої відлікової лінії. Перша поділка, яка знаходиться зліва і нижче відлікової лінії, є нульова; знизу буде шкала цілих міліметрів, а зверху – половини міліметрів.

Конічна частина барабана має 50 поділок. При повному оберті барабана гвинт переміщується на 0,5 мм. Ціна однієї поділки 0,01 мм. Ціле число обертів відраховується по нерухомій шкалі стебла, а соті – по коловій шкалі проти відлікової лінії. При суміщенні вимірювальних площин п'ятки і мікрометричного гвинта нуль шкали барабана повинен збігатися з прямою лінією на стеблі, а кі-

нець барабана з коловою шкалою – з нульовою позначкою шкали стебла. Вимірюваний об'єкт вставляється між вимірювальними площинами п'ятки і мікрометричного гвинта. В результаті обертання гвинта вимірювальні поверхні стикаються з об'єктом вимірювання.

*Для забезпечення нормального і завжди однакового натиску на об'єкт при вимірюваннях потрібно користуватись тільки тріскачкою. Тобто при вимірюваннях треба обертати барабан, прикладаючи зусилля не до барабана, а до тріскачки, доки вона не клацне кілька разів.*

Тріск при обертанні тріскачки свідчить про те, що вимірювальні поверхні стикаються з об'єктом. Відлік по мікрометру проводиться таким чином. До цілого числа міліметрів (поділки видно з-під зрізу нижче відлікової лінії) додають соті, які відраховують по коловому барабану проти відлікової лінії. Якщо над відліковою лінією вийшла ще одна поділка після відрахованих цілих міліметрів, то треба додати  $0,5$  мм.

### 1.2.2 Зважування

Вимірювання маси є найбільш поширеним видом вимірювань, оскільки вони виконуються практично у всіх галузях науки, техніки і виробництва. Вимірювання маси тіла звичайно замінюють вимірюванням ваги цього тіла, тому що вага тіла пропорційна його масі. Таким чином, порівняння ваги двох тіл одночасно є порівнянням їх мас.

Для визначення маси тіл користуються терезами. Лабораторні терези поділяються на два види: важільні та пружинні. Принцип дії важільних терезів заснований на законі важеля.

Основною робочою частиною лабораторних важільних терезів є сталеве рівноплече коромисло, на кінці якого за допомогою двох серг і стремени підвішені шальки терезів. Посередині коромисла закріплена довга стрілка. Коромисло має три тригранні призми: центральною призмою воно спирається на подушку в штоку аретира, який міститься всередині колонки, встановленої в станині; на дві інші призми, розміщені на кінцях коромисла, спираються стремени. Аретир – пристрій, якій зупиняє коливання терезів, а також вивільняє призми від навантаження, коли на терезах не проводять зважування. Щоб привести терези в робочий стан, аретир звільняють рукояткою, розміщеною у нижній частині терезів, під шкалою.

Перед початком зважування перевіряють правильність роботи терезів (однаковість відхилення вправо і вліво коливань стрілки вільних не навантажених терезів), і при необхідності вдаються до корекції.

Тіло, що зважують, для зручності поміщають на ліву шальку терезів, а важки – на праву. Гарячі, дуже холодні і мокрі предмети зважувати забороняється.

Класти і знімати важки треба *тільки при закритому аретирі*. Починають зважування з великої гирки, яка вважається найбільш близькою до маси тіла, яке зважують. Потім, послідовно знімаючи або додаючи менші гирки, домагаються рівноваги терезів. Аретир щоразу повертають рівномірно і повільно.

### **1.3 Порядок виконання роботи**

- 1) Ознайомитись з будовою штангенциркуля, мікрометра, лабораторних терезів і засвоїти методику вимірювання.
- 2) Визначити (за вказівкою викладача) масу тіл правильної форми і необхідні лінійні розміри. Кожний лінійний розмір вимірюється тричі в різних місцях. Дані записати в таблицю.
- 3) Обчислити густину матеріалу тіл і, якщо можливо, встановити матеріал, з якого виготовлено тіло, та порівняти отриманий результат з довідниковими даними.
- 4) Обчислити похибки вимірювань.

### **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

- 1) Що називають густиною – об'ємною, поверхневою, лінійною? В яких одиницях вони вимірюються?
- 2) Які тіла називають однорідними? неоднорідними?
- 3) Як обчислити масу однорідних тіл за відомою густиною?
- 4) Як обчислюється маса неоднорідних тіл?
- 5) Що таке середня густина тіла? У яких випадках нею користуються?
- 6) Запишіть формули для визначення об'ємів та площ поверхонь тіл правильної геометричної форми (паралелепіпед, призма, циліндр, конус, куля тощо).
- 7) Що таке ноніус? З якою метою він використовується у засобах вимірювань?

## 2 Лабораторна робота № 2

### ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТА ІНЕРЦІЇ ТІЛА (МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА) ЗА ДОПОМОГОЮ ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

Прилади і приладдя:

- 1) маятник Обербека;
- 2) секундомір;
- 3) масштабна лінійка;
- 4) штангенциркуль;
- 5) важки;
- 6) технічні терези.

#### 2.1 Теоретичні відомості

Основне рівняння динаміки обертального руху тіла для випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі формулюється так: *кутове прискорення обертального тіла відносно нерухомої осі  $z$  прямо пропорційно сумарному моменту зовнішніх сил, прикладених до тіла, і залежить (обернено пропорційно) від моменту інерції тіла.*

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}, \quad (2.1)$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення тіла;  $M_z$  – сумарний момент зовнішніх сил відносно осі обертання;  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання (осьовий момент інерції).

Моментом сили відносно осі обертання називається вектор  $\vec{M}_z$ , який дорівнює векторному добутку вектора  $\vec{r}$  на вектор  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}],$$

де  $\vec{F}$  – складова зовнішньої сили, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, який лежить у тій самій площині і проведений від осі до точки прикладення сили. З цього означення випливає, що вектор  $\vec{M}_z$  направлений уздовж осі  $z$  у додатному або від'ємному напрямку. Тому, розглядаючи обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, можна замість векторів  $\vec{\varepsilon}$  та  $\vec{M}$  розглядати (з врахуванням знаків) їх проекції  $\varepsilon$  та  $M_z$  на вісь обертання і застосовувати рівняння обертального руху у скалярній формі (2.1).

Момент інерції тіла – величина, яка характеризує інертні властивості обертального тіла, залежить від маси тіла та її розподілу відносно осі обертання.

Наприклад, момент інерції матеріальної точки відносно осі  $z$

$$J_z = mr^2,$$

де  $m$  – маса точки,  $r$  – відстань до осі обертання.

Тверде тіло будь-якої форми можна розглядати як систему матеріальних точок, тому момент інерції системи матеріальних точок, а отже і момент інерції тіла відносно певної осі можна знайти як суму моментів інерції всіх матеріальних точок, які утворюють тіло:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad \text{– для системи } n \text{ матеріальних точок}$$

або

$$J_z = \int_V r^2 dm \quad \text{– для суцільного тіла,}$$

тобто для кожного тіла момент інерції має певне індивідуальне значення.

Порівнюючи рівняння обертального руху (2.1) з другим законом Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

бачимо, що при обертальному русі величини  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{M}$  та  $J$  можна розглядати як аналоги відповідно прискорення  $\vec{a}$ , сили  $\vec{F}$  та маси  $m$  при поступальному русі тіла.

Для визначення моменту інерції обертового тіла в даній роботі використовується маятник Обербека (рисунок 2.1, а), який складається з трьох однорідних стержнів 1, вгвинчених у колесо 2, яке може вільно обертатися навколо горизонтальної осі. Втулка 3 колеса має шківів різних діаметрів. На шків намотують нитку, один кінець якої прикріплюють до шківа, а до другого кріплять важки 4. На стержнях маятника можна закріплювати додаткові тягарці 5.

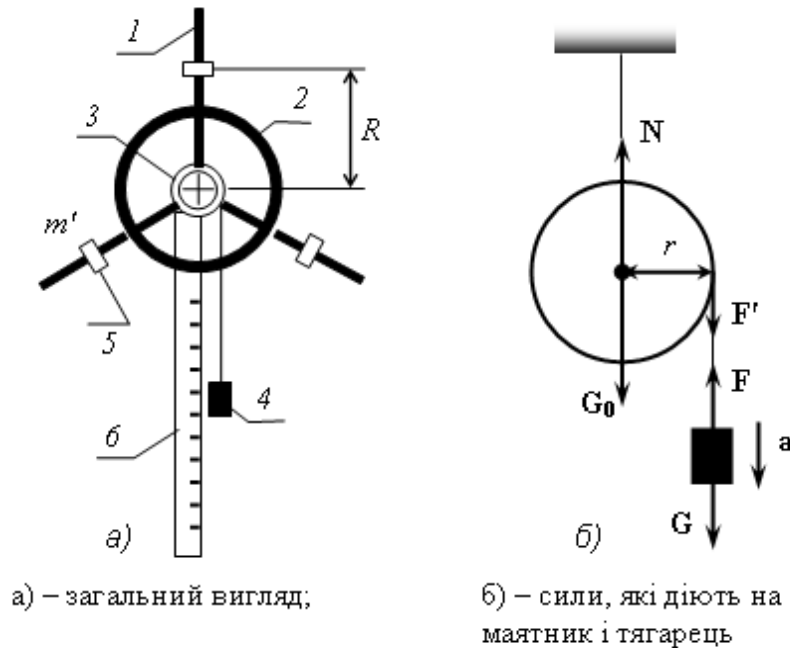


Рисунок 2.1 – Маятник Обербека



Під віссю маятника прикріплено вертикальну шкалу  $b$  завдовжки близько  $2\text{ м}$  з сантиметровими поділками. Під дією ваги важків нитка розмотується і приводить маятник у обертальний рух. Будова маятника Обербека дає можливість змінювати як момент сили, який діє на нього, так і момент інерції самого маятника.

Визначення моментів інерції тіл складної форми потребує виконання значної розрахункової роботи. У таких випадках момент інерції тіла можна виміряти експериментальним шляхом. На (рисунку 2.1, б) показані сили, які діють на маятник і вантаж. Вантаж рухається зі сталим прискоренням  $\vec{a}$  униз під дією двох сил: сили тяжіння  $\vec{G}$  та сили натягу нитки  $\vec{F}$ . За другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F},$$

або у проекціях на напрям прискорення  $\vec{a}$  руху вантажу

$$ma = mg - F,$$

звідки сила натягу нитки

$$F = m(g - a). \quad (2.2)$$

Величину прискорення  $a$  можна визначити через відстань  $h$ , пройдену вантажем за час  $t$ :

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (2.3)$$

У той самий час на маятник діє сила  $\vec{F}'$ , яка створює момент сили

$$M = F' \cdot r,$$

де  $r$  – радіус шківця маятника. Сили  $\vec{G}_0$  та  $\vec{N}$  перетинають вісь обертання і тому не створюють моментів.

Підставивши у це рівняння співвідношення (2.2), (2.3), а також враховуючи умову  $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$ , одержимо:

$$M = mr \left( g - \frac{2h}{t^2} \right). \quad (2.4)$$

Якщо нитка не розтяжна, то прискорення руху вантажу і тангенціальне прискорення точок на ободі шківця однакові за величиною. Тому кутове прискорення маятника

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{t^2 r}. \quad (2.5)$$

Об'єднуючи співвідношення (2.1), (2.4), (2.5), одержимо робочу формулу для експериментального визначення моменту інерції маятника:

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2.6)$$

## 2.2 Порядок виконання роботи

- 1) Виміряти штангенциркулем діаметр обраного для роботи шків.
- 2) Перевірити справність роботи секундоміру і електромагнітного гальма, якими обладнана установка: секундомір і гальма повинні включатись і виключатись синхронно. Зверніть увагу на те, що спочатку досліди проводять без додаткових тягарців  $m'$  на стержнях маятника. Момент інерції маятника без додаткових тягарців далі будемо позначати  $J_0$ .
- 3) Підвісити важок до нитки і, звільнивши гальмо, акуратно намотати нитку на шків, піднімаючи вантаж до нульової позначки на вертикальній шкалі. Зафіксувати важок в цьому положенні гальмом. Встановити секундомір у нульове положення.
- 4) Вибрати на вертикальній шкалі позначку на відстані  $h \sim 100 \dots 120$  см нижче нульової позначки і звільнити маятник одночасно із запуском секундоміру. Спостерігаючи рух важка, зафіксувати момент, коли важок зрівняється з вибраною позначкою. Записати до заздалегідь підготовленої таблиці висоту  $h$  і час руху  $t$ . Повторити дослід 2 – 3 рази, звертаючи увагу на відтворюваність результатів вимірювань.
- 5) Змінити масу важків  $m$  на нитці, додавши ще один важок, і повторити вимірювання, вказані в п.п. 3, 4. Загальну масу важків на нитці вибирати рівною  $\sim 100, 200$  та  $300$  г. Висоту  $h$  в усіх дослідах зручно вибирати однаковою.
- 6) Змінити момент інерції маятника, закріпивши додаткові тягарці  $m'$  на стержнях на деяких однакових відстанях  $R$  від осі обертання (рисунки 2.1, а). При цьому маятник повинен бути збалансований, тобто перебувати в байдужій рівновазі при звільненому гальмі. Виміряти  $R$  масштабною лінійкою. Момент інерції маятника з додатковими тягарцями на стержнях далі будемо позначати  $J$ .
- 7) Повторити серію дослідів згідно з п.п. 3 – 5. Дані записати в таблицю. Обчислити момент інерції  $J$  для кожного значення маси важків на нитці.
- 8) З одержаних даних за формулою (2.6) розрахувати моменти інерції  $J_0$  та  $J$  маятника. При цьому для кожного значення маси важків на нитці можна брати середній час руху.
- 9) Оцінити точність експериментального визначення моменту інерції, підраховавши абсолютні та відносні похибки вимірювань величин  $J_0$  та  $J$ . Зробити висновки.

*Момент інерції маятника з додатковими тягарцями  $J$  можна було б отримати також розрахунковим шляхом (теоретично), додавши до  $J_0$  моменти інерції трьох додаткових тягарців. Якщо розглядати додаткові тягарці як матеріальні точки, дістанемо*

## Механіка

$$J_{\text{теор}} = J_0 + 3m'R^2, \quad (2.7)$$

де через  $J_{\text{теор}}$  позначено момент інерції маятника з додатковими тягарцями, одержаний теоретично.

- 10) За формулою (2.7) оцінити момент інерції  $J_{\text{теор}}$  маятника з додатковими тягарцями і порівняти результат з відповідною величиною  $J$ , отриманою експериментально. Зробити висновки.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1) Сформулюйте закон динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Порівняйте цей закон з другим законом Ньютона. В чому полягає аналогія між ними?
- 2) Як, використовуючи одержані експериментальні результати, перевірити справедливість закону динаміки обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
- 3) Що називається моментом сили відносно осі? В яких випадках сила не створює момента відносно осі?
- 4) Що називається моментом інерції матеріальної точки? моментом інерції тіла відносно осі? Чи змінюється момент інерції твердого тіла при обертанні навколо нерухомої осі? Чи зміниться момент інерції твердого тіла, якщо перейти до нової осі обертання?
- 5) Що називається кутовим прискоренням? Як визначається кутове прискорення маятника в даній роботі?
- 6) Як визначити напрямки векторів кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$ , момента сили  $\vec{M}$ , кутової швидкості  $\vec{\omega}$ ?
- 7) Чи змінюється сила натягу нитки  $\vec{F}'$ , яка діяла на нерухомий маятник, і момент, який ця сила створювала, при звільненні гальма маятника?
- 8) Чому величини момента інерції маятника, одержані в дослідах з різними масами важків на нитці, не співпадають між собою? Які фактори слід врахувати або усунути, аби поліпшити точність експерименту?

### 3 Лабораторна робота № 3

#### ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТА ІНЕРЦІЇ МАХОВИКА ДИНАМІЧНИМ МЕТОДОМ

Прилади і приладдя:

- 1) махове колесо;
- 2) секундомір;
- 3) тягарці невеликої маси;
- 4) масштабна лінійка.

#### 3.1 Теоретичні відомості

Момент інерції твердого тіла відносно деякої осі  $z$  (осьовий момент інерції) визначається виразом

$$J_z = \int r^2 dm,$$

де  $r$  – відстань елемента маси  $dm$  від осі.

У простих випадках величину моменту інерції можна визначити розрахунком, а в складних – експериментальним шляхом.

У даній лабораторній роботі визначається осьовий момент інерції маховика експериментальним шляхом.

Одним із зручних методів експериментального знаходження невідомих моментів інерції твердих тіл є динамічний метод, заснований на застосуванні теореми про зміну механічної енергії системи (дивись далі). Цей метод дає можливість врахувати тертя в опорах, що дозволяє звести до мінімуму пов'язані з ним помилки вимірювань.

Установка для визначення моменту інерції складається з маховика<sup>2</sup> (махового колеса)  $МК$  зі шківом  $Ш$ , щільно насадженого на вал  $AB$ , лінійки і тягарця (рисунки 3.1). Вал може вільно обертатися на опорах. На шків намотується нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою  $m$ . Під дією тягарця шків разом з валом і маховим колесом рівноприскорено обертатися. На характер цього обертання впливають значення моменту інерції маховика, моменту інерції шківа, моменту інерції вала і сили тертя в опорах.

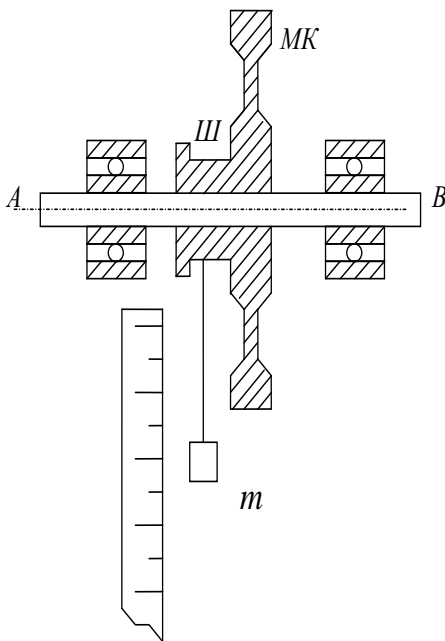


Рисунок 3.1 – Будова лабораторної установки для визначення моменту інерції маховика

<sup>2</sup> *Маховик*, махове колесо, – колесо з масивним ободом, встановлене на валу механізму з нерівномірним навантаженням для вирівнювання його ходу. Використовується в якості акумулятора механічної енергії в механізмах з нерівномірним обертальним моментом на валу і, вирівнюючи навантаження на валу двигуна, дозволяє застосовувати привід меншої потужності.

У початковому, верхньому, положенні (*положення 1*) потенціальна енергія тягарця у полі тяжіння Землі

$$\Pi_1 = mgh_1, \quad (3.1)$$

де висота  $h_1$  відраховується від найнижчого положення тягарця, тобто від рівня, на якому буде знаходитись тягарець при повністю розмотаній нитці.

При опусканні тягарця його початкова потенціальна енергія перетворюється у кінетичну енергію обертального руху махового колеса, кінетичну енергію поступального руху тягарця, а також частково витрачається на виконання роботи проти внутрішніх сил тертя.

Система тіл «Земля – колесо – тягарець» є замкненою, але наявність сил тертя всередині системи, веде до того, що механічна енергія системи не зберігається. Дія сил тертя призводить до часткового перетворення механічної енергії системи у внутрішню енергію, тобто у теплоту. Для таких систем справедлива теорема про зміну повної енергії.

*Т е о р е м а: зміна повної механічної енергії замкненої системи, всередині якої діють сили тертя, дорівнює роботі внутрішніх сил тертя:*

$$\Delta E = A_{\text{т}}, \quad \text{або} \quad E_2 - E_1 = A_{\text{т}}, \quad (3.2)$$

де  $\Delta E = E_2 - E_1$  – різниця між повною механічною енергією системи у кінцевому і початковому положеннях.

Повна механічна енергія  $E$  системи «Земля – колесо – тягарець» у полі тяжіння Землі у будь-який момент руху дорівнює сумі її кінетичної і потенціальної енергій:  $E = K + \Pi$ . Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії поступального руху тягарця  $K^{\text{пост}}$  та кінетичної енергії обертального руху махового колеса  $K^{\text{об}}$ . Отже

$$E = K^{\text{пост}} + K^{\text{об}} + \Pi. \quad (3.3)$$

Кінетична енергія поступального руху тягарця  $K^{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}$ , а кінетична енергія

обертального руху маховика  $K^{\text{об}} = \frac{J\omega^2}{2}$ , де  $J$  – момент інерції маховика,  $\omega$  – кутова швидкість його обертання.

Робочу формулу для експериментального визначення момента інерції маховика доведемо на основі теореми (3.2). Для цього зосередимо увагу на трьох положеннях системи під час її руху. *Положення 1* – початкове, коли вантаж знаходиться у найвищій точці; *положення 2* – проміжне, коли вантаж опуститься до найнижчої точки; *положення 3* – кінцеве, коли вантаж знову підніметься на деяку висоту. Далі застосуємо теорему (3.2) двічі: А) – для положень 1 і 2; Б) – для положень 1 і 3.

А) У початковому стані (*положення 1*) кінетична енергія системи дорівнює нулю і тому відповідно до (3.3)  $E_1 = \Pi_1 = mgh_1$ . Кінцевим станом системи (*положенням 2*) будемо вважати такий, в якому тягарець, рухаючись, наблизився до свого найнижчого положення. Покладемо у *положенні 2* потенціальну

енергію системи  $\Pi_2 = 0$ . Тоді відповідно до (3.2) повна енергія системи у цьому положенні

$$E_2 = K_2^{\text{пост}} + K_2^{\text{об}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (3.4)$$

Підставивши (3.1) і (3.4) у формулу (3.2), одержимо

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} - mgh_1 = A_{12}, \quad (3.5)$$

де  $A_{12} = -F_T h_1$  – робота сили тертя на шляху від початкового до кінцевого положення системи (робота сил тертя від’ємна).

Б) Шукаємо  $A_{12}$ . Силу тертя  $F_T$  знайдемо з таких міркувань. Обертаючись за інерцією, маховик піднімає тягарець на деяку висоту  $h_3 < h_1$  (положення 3) і зупиняється. У цьому положенні, згідно з (3.3), повна механічна енергія системи  $E_3 = \Pi_3 = mgh_3$ , оскільки кінетична енергія  $K_3 = 0$ . Якщо тепер вважати положення 1 за початкове, а положення 3 – за кінцеве, то за теоремою (3.2) одержимо

$$E_3 - E_1 = \Pi_3 - \Pi_1 = A_{13}, \quad \text{або} \quad mgh_3 - mgh_1 = -F_T h_1 + h_3.$$

Ми врахували, що сила тертя виконує роботу на усьому шляху від положення 1 до положення 3, який дорівнює  $h_1 + h_3$ . З останнього рівняння одержимо

$$F_T = \frac{h_1 - h_3}{h_1 + h_3} mg.$$

Отже робота сили тертя на ділянці від першого до другого положення

$$A_{12} = -F_T h_1 = -mgh_1 \frac{h_1 - h_3}{h_1 + h_3}. \quad (3.6)$$

Виразимо далі у формулі (3.5) кутову швидкість  $\omega$  маховика і лінійну швидкість  $v$  тягарця через висоту  $h$  і час руху  $t$  тягарця від початкового положення 1 (найвищого) у кінцеве положення 2 (найнижче). Для цього скористаємося відомими співвідношеннями для рівноприскореного руху тіла:

$$h = \frac{at^2}{2} \quad \text{та} \quad v = at,$$

з яких одержимо

$$v = \frac{2h_1}{t}. \quad (3.7)$$

Враховуючи також, що величина лінійної швидкості  $v$  тягарця співпадає з лінійною швидкістю точок на ободі шківів, виразимо кутову швидкість  $\omega$  обертання маховика через швидкість  $v$  та радіус  $r$  шківів:

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (3.8)$$

Підставивши співвідношення (3.6) (3.7), (3.8), у формулу (3.5) і розв’язавши отримане рівняння відносно  $J$ , дістанемо *робочу формулу* для визначення моменту інерції маховика:

$$J = mr^2 \left[ gt^2 \frac{h_3}{h_1(h_1 + h_3)} - 1 \right]. \quad (3.9)$$

З а у в а ж е н н я . Якби ми знехтували тертям, то отримали б  $A_T = 0$ , відповідно  $\Delta E = 0$  (механічна енергія зберігалась би), і тоді  $h_3 = h_1$ . За таких умов формула (3.9) набуде вигляду

$$J_0 = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h_1} - 1 \right). \quad (3.10)$$

де  $J_0$  – момент інерції маховика, знайдений без врахування тертя.

### 3.2 Порядок виконання роботи

- 1) Визначити масу тягарців. Виміряти штангенциркулем радіус шківів.
- 2) Визначити на шкалі лінійки рівень відліку потенціальної енергії системи, який відповідає найнижчому положенню тягарця.
- 3) Підвісити тягарець і, обертаючи колесо, підняти тягарець до рівня нульової відмітки на лінійці.
- 4) Одночасно з включенням секундоміру звільніть маховик і виміряйте час  $t$ , за який тягарець опуститься в крайнє нижнє положення. Маховик не зупиняти!
- 5) Продовжуючи спостереження руху маховика за інерцією, визначте висоту  $h_3$ , до якої знову підніметься тягарець.
- 6) Повторити вимірювання *n.n.* 4, 5 декілька разів з різними наборами тягарців (не менше 3 – 4 дослідів у кожному випадку). Дані занести у таблицю. Форму таблиці придумайте самі.
- 7) За формулою (3.9) розрахуйте момент інерції  $J$  махового колеса для кожної серії дослідів, підставляючи у робочу формулу середні значення  $t$  і  $h_3$ .
- 8) Обчисліть абсолютну та відносну похибки вимірювань.
- 9) За формулою (3.10) знайдіть момент інерції  $J_0$  маховика без врахування тертя. Оцініть *відносне відхилення* величини  $J_0$  від  $J$  за формулою

$$\delta = \left| \frac{J - J_0}{J} \right| \cdot 100\% .$$

- 10) Зробіть висновки.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1) Що називається моментом інерції тіла відносно осі?
- 2) Яким методом визначається момент інерції маховика у даній роботі?
- 3) Сформулюйте закон збереження механічної енергії?
- 4) Сформулюйте теорему про зміну механічної енергії системи.
- 5) Чому дорівнює кінетична енергія поступального руху тіла? обертального руху тіла?
- 6) Доведіть робочу формулу для визначення момента інерції маховика.

## 4 Лабораторна робота № 4

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДИНАМІЧНОЇ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА

Прилади і приладдя:

- 1) скляний циліндр з в'язкою рідиною (гліцерин);
- 2) секундомір;
- 3) мікрометр;
- 4) масштабна лінійка;
- 5) свинцеві кульки діаметром  $1 \dots 3$  мм.

#### 4.1 Теоретичні відомості

В'язкістю називається властивість рідин або газів чинити опір при відносному переміщенні їхніх шарів. В'язкість відноситься до явищ переносу.

У потоках реальних рідин (газів) поблизу змочуваних поверхонь твердих тіл або поблизу поверхні тіла, що рухається у рідині (газі), різні шари рідини мають неоднакову швидкість. Швидкість шару, який безпосередньо торкається поверхні твердого тіла, дорівнює нулю (відносно тіла). При віддаленні від поверхні тіла швидкість шарів рідини відносно тіла збільшується (рисунок 4.1). Інакше кажучи, виникає рух одних шарів рідини відносно інших. При цьому між сусідніми шарами рідини або газу виникають сили внутрішнього тертя, які намагаються зрівняти швидкості руху шарів.

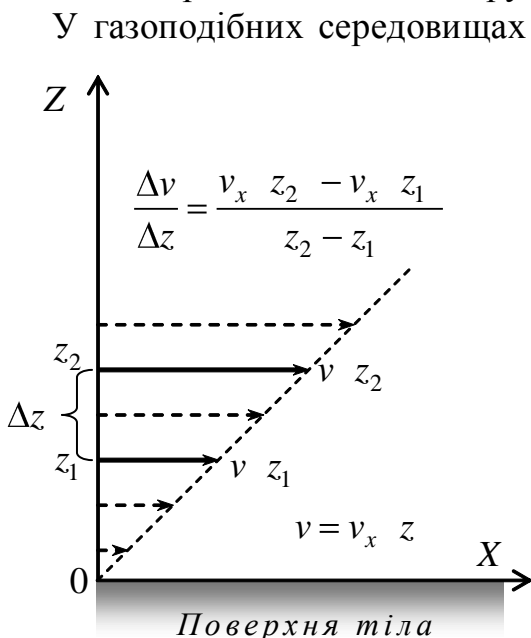


Рисунок 4.1. Розподіл швидкостей у рідині поблизу поверхні тіла

У газоподібних середовищах сили внутрішнього тертя виникають тому, що внаслідок хаотичного руху молекул сусідні шари газу безперервно обмінюються молекулами. Молекули з більш швидкого шару передають повільному шару деякий додатковий імпульс – повільний шар починає рухатись швидше, і навпаки.

У рідинах в'язкість зумовлена як обміном окремими молекулами або атомами, так і силами взаємодії між молекулами сусідніх шарів. Щодо рідин поняття імпульсу молекул навіть при наближеному розгляді втрачає сенс, бо він дуже змінюється у зв'язку з коливаннями молекул.

Коефіцієнт в'язкості  $\eta$  при ламінарній течії рідин, як і коефіцієнт в'язкості газів, визначається із закону Ньютона:



$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} \Delta S, \quad (4.1)$$

де  $F$  – сила внутрішнього тертя між суміжними шарами рідини;  $\Delta S$  – площа поверхні взаємодії суміжних шарів рідини, на яку розраховується сила внутрішнього тертя;  $\frac{\Delta v}{\Delta z}$  – градієнт швидкості рідини у напрямку, перпендикулярному до напрямку течії рідини. Одиниця вимірювання в'язкості (динамічної в'язкості) рідин або газів:  $\eta = \frac{H \cdot c}{m^2} = Pa \cdot c$ .

При підвищенні температури в'язкість рідин зменшується, а в'язкість газів зростає.

Один з відомих методів визначення коефіцієнта в'язкості рідин є *метод Стокса*, який ґрунтується на вимірюванні швидкості рівномірного руху (падіння) тіла сферичної форми (кульки) у досліджуваній рідині. За законом Стокса сила в'язкого тертя, яка діє на тверду кульку радіуса  $r$ , що рухається у рідині з швидкістю  $v$ , становить

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (4.2)$$

При падінні кульки у рідині ця сила діє протилежно напрямку руху кульки, тобто напрямку вектора  $\vec{v}$ , змінюючись пропорційно модулю швидкості руху.

При зрівноваженні сили в'язкості  $\vec{F}$ , сили Архімеда  $\vec{F}_A$  та сили тяжіння  $\vec{G}$  рух кульки стає рівномірним (рисуюнок 4.2), тобто  $\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{G} = 0$ , звідки, переходячи до проєкцій векторів на вертикальну вісь, отримаємо

$$G = F + F_A.$$

Розписавши ці сили за величиною, одержимо:

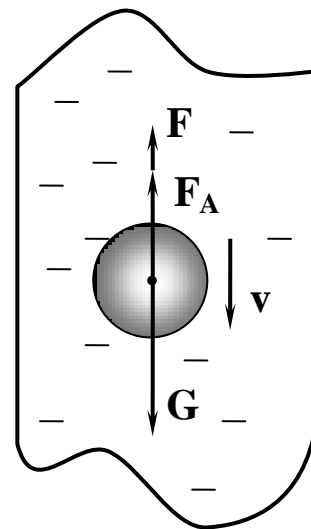
$$3\pi\eta d v + \frac{1}{6}\pi d^3 \rho g = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_1 g, \quad (4.3)$$

де  $d$  – діаметр кульки;  $\rho$  і  $\rho_1$  – густини рідини та матеріалу кульки відповідно;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Після перетворень рівняння (4.3) отримаємо:

$$\eta = \frac{\rho_1 - \rho}{18v} g d^2.$$

Підставивши у це рівняння експериментально виміряну швидкість рівномірного падіння кульки у рідині:  $v = \frac{L}{t}$ , одержимо *робочу формулу* для визначення коефіцієнта в'язкості рідини:



Рисуюнок 4.2 – Сили, які діють на кульку у рідині

$$\eta = \frac{\rho_1 - \rho}{18L} \cdot g d^2 t. \quad (4.4)$$

## 4.2 Опис установки

Скляний циліндр з досліджуваною рідиною (гліцерином) закріплено вертикально на кронштейнах. На циліндрі зроблені дві позначки: одна на 10...12 см нижче поверхні рідини, друга – на такій же відстані від дна циліндра. Верхня позначка відповідає рівню, на якому рух кульки у рідині вже можна вважати рівномірним, нижня – відмежовує вплив дна посудини на рівномірний рух кульки. Між цими позначками і визначають швидкість рівномірного падіння кульки в рідині.

Дослід повторюють 4...5 разів, підготувавши для цього потрібну кількість кульок. Діаметри  $d_i$  кульок вимірюють мікрометром, відстань  $L$  між позначками на циліндрі – масштабною лінійкою, час падіння кульок – секундоміром.

## 4.3 Експериментальна частина

- 1) Виміряти і записати відстань між верхньою і нижньою позначками на циліндрі.
- 2) Виміряти мікрометром діаметр кожної кульки – тричі, у різних напрямках. Записати у таблицю результати окремих вимірювань, а також середнє значення діаметра для кожної кульки.
- 3) Опустити кульку у рідину. Визначити за допомогою секундоміру час падіння кожної кульки у рідині між верхньою і нижньою позначками на циліндрі. Результати вимірювань записати у таблицю.
- 4) За формулою (4.4) визначити у кожному досліді коефіцієнт в'язкості рідини і записати результат розрахунку у таблицю.
- 5) Визначити абсолютну та відносну похибки вимірювань.
- 6) Записати кінцевий результат. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1) Які процеси зумовлюють в'язкість газів та рідин?
- 2) Які сили діють на кульку під час її руху у рідині?
- 3) За яких умов кулька буде рухатися у рідині рівномірно?
- 4) Сформулюйте закон Архімеда і закон Стокса.
- 5) Який фізичний зміст коефіцієнта динамічної в'язкості?
- 6) У яких одиницях вимірюється коефіцієнт динамічної в'язкості?

## 5 Лабораторна робота № 5

### ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ КІНЕМАТИКИ ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА

Прилади і приладдя:

- 1) машина Атвуда;
- 2) тягарці;
- 3) секундомір.

#### 5.1 Теоретичні відомості

Машина Атвуда призначена для вивчення законів прямолінійного руху тіл у полі земного тяжіння.

Легкий блок вільно обертається навколо осі, закріпленої на верхній частині вертикальної стійки з сантиметровими позначками (рисунки 5.1). Через блок перекинута нитка, на кінцях якої висять тягарі  $A$  і  $B$  однакової маси  $M$ . До тягаря  $A$  можна добавляти додатковий тягарець  $T$ . За таких умов система тіл виходить з рівноваги і починає рухатись рівноприскорено.

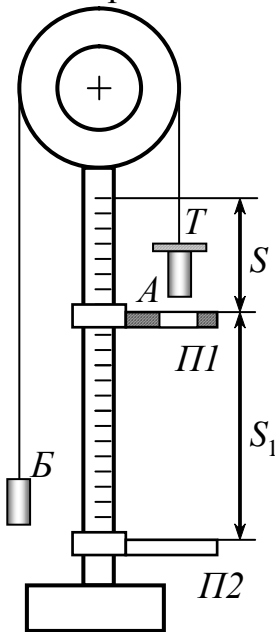


Рисунок 5.1 – Будова машини Атвуда

Застосовуючи другий закон Ньютона до системи тягарців за умови, що нитка невагома і нерозтяжна, а також нехтуючи інертністю блока та тертям, одержимо теоретичне значення прискорення, якого набуває система в *ідеальних* умовах:

$$a = \frac{mg}{m + 2M}, \quad (5.1)$$

де  $m$  – маса додаткового тягарця. Тобто тягарі рухаються рівноприскорено.<sup>3</sup>

Мета роботи – експериментально перевірити рівноприскорений характер руху тягарів у *реальних* умовах (при наявності сил тертя, інертності блока тощо), експериментально визначити величину прискорення і порівняти отриманий результат з величиною, розрахованою за формулою (5.1).

Оскільки не існує простих засобів безпосереднього вимірювання прискорення, будемо користуватися відомими залежностями від часу пройденого шляху  $S$   $t$  та швидкості  $v$   $t$  при рівноприскореному русі тіла без початкової швидкості:

$$S \ t = \frac{at^2}{2} \quad (5.1)$$

<sup>3</sup> У теоретичній механіці для позначення лінійного прискорення рекомендується літера  $\vec{w}$ .

та

$$v \ t = at . \quad (5.3)$$

## 5.2 Експериментальна частина

Підставку *III* з отвором закріплюють на стійці на відстані  $S$  нижче верхньої (нульової) позначки (дивись *рисунок 5.1*). При цьому треба впевнитись, що під час руху тягар  $A$  вільно проходить крізь отвір у підставці. Потім на тягар  $A$  кладуть додатковий тягарець і піднімають до нульової позначки. Відпускають тягарі і одночасно включають секундомір. У той момент, коли тягар  $A$  проходить крізь отвір у підставці і звільняється від додаткового тягарця  $T$ , виключають секундомір, фіксуючи час  $t$  прискореного руху на ділянці  $S$ . Далі, при тому ж самому положенні підставки *III*, повторюють дослід, але секундомір включають у той момент, коли тягар  $A$  звільняється від додаткового тягарця, проходячи крізь отвір, а виключають, коли він досягне нижньої підставки *II2*, фіксуючи час  $t_1$  рівномірного руху тягаря на ділянці  $S_1$ . Очевидно, швидкість рівномірного руху тягаря  $A$  на нижній ділянці:  $v = S_1/t_1$  співпадає з *кінцевою* швидкістю тягаря на верхній ділянці.

## 5.3 Графічна обробка результатів вимірювань

Одним з найбільш поширених методів обробки експериментальних результатів є метод *спрямлення* нелінійної залежності, тобто зведення відомої з теорії нелінійної залежності до лінійної. Це пов'язано з тим, що лінійна залежність відображується на графіку у найбільш простому і зручному вигляді – прямої лінії. Так, досліджуючи рівноприскорений рух, ми припускаємо, що експериментальні результати будуть узгоджуватися із залежністю (5.2). Графік цієї залежності має вигляд параболи, і провести таку лінію достатньо точно, орієнтуючись лише на експериментальні точки, майже неможливо.

Але якщо відкласти на осях величини « $S - t^2$ » або « $\sqrt{S} - t$ », або, наприклад, « $\lg S - \lg t$ » або « $\ln S - \ln t$ », то графік набуває вигляду прямої лінії, яку побудувати значно простіше. Нахил одержаної прямої, або точки перетину її з осями координат дозволяють легко визначити невідоме прискорення руху.

## 5.4 Порядок виконання роботи

- 1) Визначити маси тягарів і додаткового тягарця.
- 2) Закріпити підставку *III* на відстані 30...40 см нижче нульової (верхньої) позначки. Виміряти величини  $S$  і  $t$  та  $S_1$  і  $t_1$ . Для даного положення підставки *III* вимірювання проміжків часу  $t$  і  $t_1$  повторити 3 – 4 рази, звертаючи увагу на відтворюваність результатів вимірювань. Результати записати у заздалегідь підготовлену таблицю. Якщо одержані результати добре збігаються, для подальших розрахунків беруть їх середнє значення.
- 3) Перемістити підставку *III* у нове положення (~ на 10 см нижче попереднього положення) і повторити цикл вимірювань *n*. 2. Кожному положенню підставки *III* буде відповідати одна точка на графіку (дивись далі). Для побудо-

## Механіка

ви графіка треба одержати мінімум 5 – 6 точок. Слід зауважити, що опускати підставку *III* дуже низько недоцільно, оскільки у таких випадках значно скорочується час  $t_1$  і відповідно зростає похибка вимірювання.

- 4) Розрахувати та записати у таблицю дані, необхідні для побудови графіків залежностей  $v = v t$ , а також однієї із залежностей (за вказівкою викладача):

$$S = f t^2 ; \quad \sqrt{S} = f t ); \quad \lg S = f \lg t^2 ; \quad \lg S = f \lg t \quad \text{тощо.}$$

У таблиці слід передбачити кілька вільних граф для величин, які заноситимуться до таблиці під час обробки результатів вимірювань.

- 5) Побудувати графіки залежності  $v = v t$  та вибраного варіанту спрямленої залежності.

*Беручись до побудови графіків, уважно прочитайте стандартні вимоги, яких при цьому обов'язково слід дотримуватись (дивись Вступ, с. 5).*

Після нанесення на площину графіка експериментальних точок провести пряму лінію так, щоб точки розташувались якомога ближче до прямої, а кількість точок вище і нижче лінії була приблизно однаковою. Якщо на графіку виявляються точки, які помітно відхиляються від прямої, то треба з'ясувати причини такого відхилення і при необхідності повторити відповідні вимірювання.

- 6) По кожному з графіків розрахувати прискорення руху. Порівняти одержані величини з теоретичним значенням (5.1), пояснити причини розбіжностей. Зробити висновки.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1) Що таке прискорення? Який рух називається рівноприскореним? рівномірним?
- 2) Доведіть основні кінематичні співвідношення для рівномірного і рівноприскореного руху.
- 3) Як, спираючись на закони Ньютона, довести формулу (5.1)?
- 4) Які існують способи спрямлення нелінійних залежностей? Для чого це потрібно?
- 5) Чому прискорення руху тягарців, знайдене експериментальним шляхом, відрізняється від результату, розрахованому за формулою (5.1)?

## 6 Лабораторна робота № 6

### ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОЛЬОТУ КУЛІ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНОГО БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА

Прилади і приладдя:

- 1) крутильний балістичний маятник;
- 2) балістичний пістолет;
- 3) металева куля;
- 4) секундомір;
- 5) масштабна лінійка;
- 6) терези.

*Крутильний маятник* являє собою масивне тіло із значним осьовим моментом інерції (горизонтальний стержень з противагами), закріплене на пружному сталевому підвісі (рисунк 6.1). Такий маятник, виведений зі стану рівноваги, здійснює крутильні коливання у горизонтальній площині навколо вертикальної осі підвісу. Маятники, конструкція яких передбачає можливість їх використання для балістичних вимірювань (тобто оздоблені мішенню, наприклад, у вигляді диску) називають *балістичними*.<sup>4</sup>

Мета лабораторної роботи полягає у ознайомленні з основними принципами *балістичних* вимірювань і визначенні швидкості руху тіла одним з методів балістики.

#### 6.1 Теоретичні відомості

Куля масою  $m$  влучає у мішень  $D$ , закріплену на горизонтальному стержні. Внаслідок непружного зіткнення кулі з мішенню маятник починає рухатись і, обертаючись у горизонтальній площині, відхиляється від положення рівноваги. При цьому кінетична енергія маятника поступово перетворюється у потенціальну енергію пружної деформації кручення підвісу – сталевого дроту. Коли потенціальна енергія деформації досягне максимальної величини, маятник зупиниться, відхилившись на максимальний кут, після

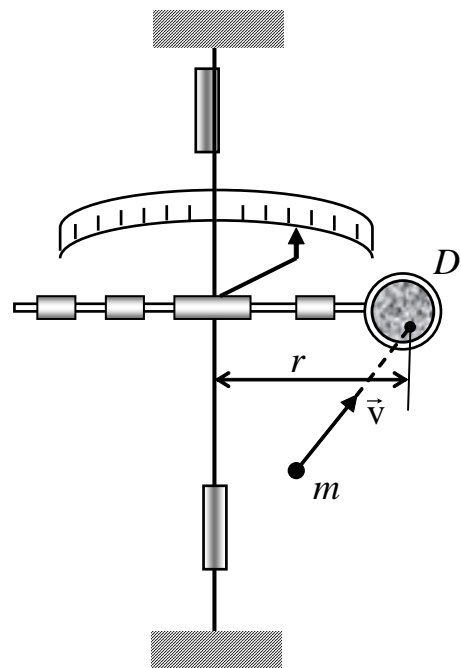


Рисунок 6.1 – Будова крутильного балістичного маятника

<sup>4</sup> Балістика (від грец. βάλλω – кидаю) – наука про рух важких тіл, кинутих у просторі, яка базується на фізиці та математиці. Вона займається головним чином дослідженням руху некерованих ракет, артилерійських снарядів, авіабомб, мін, куль, випущених з вогнепальної зброї.

чого почнеться зворотний процес. Таким чином, маятник буде здійснювати коливання.

Для визначення швидкості руху кулі скористаємося законами збереження у механіці: законом *збереження моменту імпульсу* та законом *збереження механічної енергії*. Вважаючи удар кулі по мішені абсолютно непружним, запишемо закон збереження моменту імпульсу:

$$mvr = J\omega, \quad (6.1)$$

де  $m$  – маса кулі;  $v$  – швидкість кулі до удару;  $r$  – відстань від лінії польоту кулі до осі обертання маятника (*рисунок 6.1*);  $J$  – осьовий момент інерції маятника, тобто момент інерції маятника відносно осі обертання;  $\omega$  – кутова швидкість, якої набуде маятник одразу після удару (тобто у положенні рівноваги).

Осьовий момент інерції  $J$  маятника невідомий, але його можна визначити, вимірюючи період  $T$  коливань маятника. Відомо, що період коливань крутильного маятника при незначних амплітудах

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} \quad (6.2)$$

де  $k$  – константа, яка залежить від матеріалу та розмірів дроту (підвісу) і називається *жорсткістю при крученні*. Розрахунок цієї константи розглянуто у «Додатку В». Для нашого маятника  $k = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{град}$ .

Для визначення кутової швидкості  $\omega$  скористаємося законом збереження механічної енергії. Нехтуючи незначними втратами енергії за один період коливань, можна вважати, що у межах одного періоду коливань максимальні значення кінетичної і потенціальної енергій маятника однакові. Кінетична енергія маятника максимальна при проходженні ним положення рівноваги і складає

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (6.3)$$

Потенціальна енергія маятника  $E_{II}$  буде максимальною у моменти зупинки, тобто при максимальному куті відхилення від положення рівноваги. При крученні дроту виникає пружний момент сил, який за законом Гука пропорційний куту закручування  $\alpha$ :

$$M = -k\alpha,$$

де  $k$  – жорсткість дроту при крученні.

Елементарна робота пружного моменту при повороті маятника на малий кут  $d\alpha$  (від  $\alpha$  до  $\alpha + d\alpha$ ):

$$dA = Md\alpha = -k\alpha d\alpha.$$

Інтегруючи це рівняння за умови, що потенціальна енергія у положенні рівноваги дорівнює нулю, дістанемо

$$E_{\Pi} = - \int dA = \int_0^{\alpha} k\alpha d\alpha = \frac{k\alpha^2}{2}. \quad (6.4)$$

Якщо розглядати  $\alpha$  як максимальний кут відхилення, то із закону збереження механічної енергії з врахуванням (6.3) і (6.4) отримаємо:

$$E_K^{\text{макс}} = E_{\Pi}^{\text{макс}}, \quad \text{тобто} \quad \frac{J\omega^2}{2} = \frac{k\alpha^2}{2},$$

звідки дістанемо

$$\omega = \alpha \sqrt{\frac{k}{J}}. \quad (6.5)$$

Об'єднуючи (6.1), (6.2) та (6.5), отримаємо *робочу формулу* для визначення швидкості польоту кулі:

$$v = \frac{k\alpha T}{2\pi \cdot mr}. \quad (6.6)$$

## 6.2 Експериментальна частина

Маятник підвішений на сталевому дроті на спеціальних кронштейнах (*рисунок 6.1*). Мішень – металевий диск з нанесеним на його поверхню шаром пластиліну. При малих кутах відхилення коливання маятника можна вважати гармонічними. Кут відхилення маятника визначається по шкалі транспортиру. Період коливань вимірюють за допомогою секундоміру. Вимірювання слід виконувати у такій послідовності:

- 1) визначити масу кулі на технічних терезах.
- 2) спостерігаючи коливання маятника, виміряти час  $t$ , протягом якого маятник зробить  $n = 10$  повних коливань і визначити період  $T$  коливань:  $T = \frac{t}{n}$ .
- 3) встановити пружинний пістолет на відстані  $10 \dots 15$  см від мішені перпендикулярно до її площини.
- 4) виконати  $5 \dots 6$  пострілів, фіксуючи у кожному досліді максимальний кут відхилення вліво  $\alpha_1$  та вправо  $\alpha_2$ , а також відстань  $r$  від точки удару кулі по мішені до осі обертання маятника (*рисунок 6.1*). У різних дослідах відстань  $r$  можна змінювати, пересуваючи пістолет. У момент пострілу маятник повинен бути нерухомий. Дані вимірювань занести до таблиці.
- 5) для усунення можливої систематичної похибки, пов'язаної з неточністю відліку нульового положення маятника, треба у кожному досліді обчислити середній кут відхилення  $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  вправо та вліво і записати результат в окрему колонку таблиці.



## Механіка

- б) за формулою (6.6) розрахувати для кожного досліду швидкість польоту кулі. Обчислити похибки вимірювань. Записати кінцевий результат. Зробити висновки.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1) Що таке крутильний балістичний маятник? Як визначити період коливань такого маятника?
- 2) Чому дорівнює момент імпульсу матеріальної точки, яка рухається відносно осі? Чому дорівнює момент імпульсу тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?
- 3) Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу. Як цей закон застосовувався при доведенні робочої формули у даній лабораторній роботі?
- 4) Сформулюйте закон збереження механічної енергії. Як він застосовується для крутильного балістичного маятника?

## Рекомендована література

1. ДСТУ 3008-95 (Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення).
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
3. Елементи векторної алгебри. Методичні вказівки до самостійної роботи з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл.: Ушаков В.Г., Григоренко В.А., Тепла Т.М. – Чернігів: ЧДТУ, 2012. – 24 с.
4. Зачек І.Р., Кравчук І.М., та ін. Курс фізики: навчальний підручник. – Львів: «Бескид Біт», 2002. – 376 с.
5. Інтегрування в фізиці. Частина І. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт та підготовки до практичних занять з фізики для студентів денної та заочної форми навчання / Укладачі: Григоренко В.А., Єршов Р.Д., Журко В.П., Ушаков В.Г. – Чернігів: ЧДТУ, 2009. – 100 с.
6. Иродов И.Е. Основные законы механики. – М.: Высш. шк., 1985. – 248 с.
7. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики; Навч. посібник для студентів вищих техн. і пед. закладів освіти /За ред. І.М.Кучерука. – К.: Техніка, 1999. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – 536 с.
8. Механіка. Розв'язання задач з фізики. Методичні вказівки до практичних занять, виконання розрахунково-графічних робіт та самостійної роботи з фізики для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. / Укл.: Ушаков В.Г., Тепла Т.М., Єршов Р.Д. – Чернігів: ЧДТУ, 2013. – 44 с.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1986. – Т.1. Механика. Молекулярная физика. – 432 с.

**Додаток А – Зразок оформлення титульної сторінки звіту  
про виконання лабораторних робіт**

Міністерство освіти і науки України  
Чернігівський національний технологічний університет

Кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,  
метрології та фізики

**ЗВІТ**

**про виконання лабораторних робіт з фізики**

Розділ (назва розділу: механіка; електромагнетизм, ...)

Виконав:

студент групи .....

(№ групи)

(підпис)

(дата)

.....

(Прізвище, ініціали студента)

Викладач:

.....

(підпис)

(дата)

.....

(Прізвище, ініціали викладача)

Чернігів ЧНТУ

(рік)

**Додаток Б – Коефіцієнти Стьюдента**

Таблиця Б1 – Значення  $t(p, n)$  для надійної ймовірності  $p$  при кількості вимірювань  $n$

	$p = 0,80$	$0,90$	$0,95$	$0,98$
$n = 2$	3,08	6,31	12,71	31,82
3	1,89	2,92	4,30	6,96
4	1,64	2,35	3,18	4,54
5	1,53	2,13	2,78	3,75
6	1,48	2,02	2,57	3,36
7	1,44	1,94	2,45	3,14
8	1,41	1,90	2,36	3,00
9	1,40	1,86	2,31	2,90
10	1,38	1,83	2,26	2,82
11	1,37	1,81	2,23	2,76
12	1,36	1,80	2,20	2,72
13	1,36	1,78	2,18	2,68
14	1,35	1,77	2,16	2,65
15	1,34	1,76	2,14	2,62

**Додаток В – Розрахунок жорсткості підвісу при крученні**

Коефіцієнт жорсткості  $k$  при крученні дроту довжиною  $L$  і діаметром  $d$ , розраховується за відомою з курсу опору матеріалів формулою  $k = \frac{\pi d^4 G}{32L}$ , де  $G$  – модуль зсуву матеріалу дроту. Для сталі  $G = 7,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

При розрахунках величини  $k$  для крутильного маятника слід взяти до уваги, що на маятник діють дві ділянки дроту (підвісу): верхня і нижня. Тому жорсткість системи є сумою жорсткостей верхнього і нижнього дротів. З цього витікає

$$k = k_1 + k_2 = \frac{\pi \cdot d^2 G \cdot (L_1 + L_2)}{32L_1 L_2},$$

де  $L_1$  і  $L_2$  – довжини верхньої і нижньої ділянок дроту.