МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Чернігівська політехніка»

Вища математика
Частина III

методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
з дисципліни "Вища математика"
для студентів інженерних спеціальностей

Обговорено і рекомендовано
на засіданні кафедри АТ та ГМ,
протокол № 13 від 14.06. 2021р.

Чернігів - 2021

Вища математика Частина III методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей ./Укл.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська– Чернігів:2021, - 71с.

Укладачі:

Мурашковська Вірв Петрівна, ст. викл.
Руновська Людмила Анатоліївна, ст. викл.

Відповідальний за випуск: Кальченко Віталій Іванович, завідувач кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування, професор, доктор технічних наук

Рецензент: Венжега Володимир Іванович – доцент, кандидат технічних наук кафедри автомобільного транспорту та галузевого машинобудування

Зміст

Вступ

Курс вищої математики разом із курсами інших загальноосвітніх дисциплін складає основу фундаментальної підготовки сучасних інженерів та економістів. Сучасне життя потребує від майбутніх фахівців оволодіти основними математичними навичками, які вони отримують, вивчаючи курс вищої математики в університеті.

Дані методичні вказівки призначені для студентів заочної форми навчання і містять завдання до індивідуальних розрахунково – графічних робіт з вищої математики за темами: "ряди", "кратні інтеграли", "криволінійні і поверхневі інтеграли " та "теорія поля," які передбачені робочими навчальними програмами підготовки студентів за певними спеціальностями. Основною формою навчання студента є самостійна робота над навчальним матеріалом, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних, розрахунково-графічних робіт.

Метою індивідуальних домашніх завдань, поданих в даному посібнику, є допомога студенту поглибити теоретичні знання, засвоїти основні формули, навчитись розв'язувати ряд простих типів задач та перевірити результати самостійної роботи студента з вивчених тем. Розв'язування поданих завдань, також дозволяє студенту зрозуміти степінь засвоєння їм відповідних розділів курсу, вказує на прогалини, які виникли під час вивчення матеріалу, допомагає сформулювати питання викладачам під час консультацій.

Виконуючи домашню контрольну роботу студент повинен самостійно розв'язати запропоновані викладачем індивідуальні домашні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи або останні дві цифри номера залікової книжки. Розв'язання завдань з поясненнями подається на аркушах формату *A4* (запис в яких виконується з одного боку). Умову завдань необхідно переписувати повністю без скорочень, після чого надавати розв'язання цього завдання, супроводжуючи його необхідним поясненням і з посиланням на відповідні формули, теореми, правила тощо. Побудови графіків потрібно виконувати олівцем на тому ж аркуші, де і відповідне розв’язання, або на папері з масштабною сіткою. На титульній сторінці розрахунково-графічної роботи вказують номер варіанту, прізвище та ініціали студента, групу, прізвище та ініціали викладача.

Після перевірки роботи викладачем, якщо є зауваження, студент повинен розв’язати неправильно виконані завдання заново у тому ж зошиті і повторно подати його на перевірку. Після позитивної оцінки викладача робота підлягає захисту. Результат цієї роботи враховується при складанні студентом заліку або іспиту.

Окрім завдань до розрахунково-графічної роботи методичні вказівки містять рекомендовану літературу з відповідних тем курсу вищої математики та розв’язання типового варіанта, що значно допоможе студенту краще орієнтуватися в матеріалі при самостійному вивченні курсу, при виконанні індивідуальних контрольних робіт, тобто оволодіти вузівським курсом вищої математики та успішно скласти іспит (залік) в кінці семестру.

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)!}{n^5}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n:\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+2}{4n^2+1}\right)^2$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\ln(n+3)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{(2n-1)^3}}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}x^n}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2n-1}}{2n-1}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos(5x/2)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,25}x\ln(1+\sqrt{x})dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=xy+e^y$, $y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x-1, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=2x+1,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=1-x^2$, задану в інтервалі $(0;\pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}fdx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(2x^2y^2+16x^3y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D(x^2+y)dxdy$, $D:\ y=x^2,\ x=y^2$

в) $\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x = 2,\ y = 4x,\ y = 3\sqrt{x},\ z \ge 0\ z = 4$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz,\ V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0,\ z \ge 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x},$
$z = 0,\ x + z = 2$

б) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,$
$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$;

б) $\oint\limits_L \sqrt{2y^2 + z^2}\,dl$, де L – коло $y^2 + z^2 = a^2$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)\,dS,$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): x + 3y + z = 3$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (y^2 + x^2)\,dydx$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболоїда $z = 9 - y^2 - x^2$ (нормальний вектор n якої утворює гострий кут з ортою i), обмежена площиною $x = 0$.

18. Дана функція $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$ і точки $M_1($[illegible]$, -1, 2)$, $M_2(3, 4, -1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (x + z)\,i + (z + y)\,k,$
$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x,\ z = 0\ (y \ge 0) \end{cases}$

б) $a = x^2 i + xj + xzk,$
$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2,\ z = 1, \\ x = 0,\ y = 0, \end{cases}$ (I октант)

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = zi + (x + y)\,j + yk,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x + y + 2z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$

$a(M) = (x^2 - y)\,i + xj + k,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n-1}{5^n\,(n+1)!}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+2)\,\mathbf{ln}(3n+2)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^5+2}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n/2}x^n}{(n+1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{3n+2}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{cos}\,x^2$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathbf{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням *x* розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x^2y^2+1,\;\; y(0)=1.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=3x+1,\;\; x\in(-2, 2).$

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=2-x^2$, задану в інтервалі $(0;\,\pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\; y=\sqrt{4-x^2},\; y=\sqrt{3x},\; x\ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D (9x^2y^2+48x^3y^3)\,dxdy$, $D:\; x=1,\; y=\sqrt{x},\; y=-x^2$

б) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D:\; y=x^2,\; y=2x$

в) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}}\dfrac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\; y=6x^2,\; x+y=2,\; x\ge 0$;

б) $D:\; x^2-4x+y^2=0,\; x^2-8x+y^2=0,\; y=0,\; y=x/\sqrt{3}$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=1,\ y=3x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=2(x^2+y^2)$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ V: z\ge 0, z=2,\ y\ge \pm x, z^2=4(x^2+y^2)$.

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y=5\sqrt{x},\ y=5x/3,$ $z=0,\ z=5+5\sqrt{x}/3$

б) $z=2-(x^2+y^2),\ x+2y=1,$ $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} x^2dy-y^2dx$, де L_{AB} – дуга параболи $x=\sqrt{y}$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 4)$;

б) $\int\limits_L yzdl$, де L – четверта частина кола $y^2+z^2=R^2$, яка знаходиться в першому октанті.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (z+y-7x+9z)\,dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x-y-2z=-2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S z^2dxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=2,\ z\ge 0$.

18. Дана функція $u(M)=5xy^3z^2$ і точки $M_1(2, 1, -1)$, $M_2(4, -3, 0)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=2xi+zk,$ $S: \begin{cases} z=3x^2+2y^2+1, \\ x^2+y^2=4,\ z=0 \end{cases}$

б) $a=(x^2+y^2)i+(y^2+z^2)j+(y^2+z^2)k,$ $S: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру Γ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+z)i+zj+(2x-y)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $3x+2y+z=6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру Γ $a(M)=xzi-j+yk,\ \ \Gamma: \begin{cases} z=5(x^2+y^2)-1, \\ z=4. \end{cases}$

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{1}{n^7}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arctg}\frac{1}{2n+1}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,\mathbf{ln}^3(n+1)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\mathbf{ln}\,n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)x^n}{n^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{sin}(x^2/4)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}\,\mathbf{e}^{-x}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = x^2 - y^2,\ \ y(0)=1/2$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x+2, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=2x-1,\ \ x\in(-2,2)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-3)^2$, задану в інтервалі $(0;\ \pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D\!:\ x=\sqrt{8-y^2},\ y\ge 0,\ y=x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}f dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{x}^{0}f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D (7x^2y^2+48x^3y^3)\,dxdy$, $D\!:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, $D\!:\ y^2=x,\ y=x$

в) $\int\limits_0^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\mathbf{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D\!:\ y^2=x+2,\ x=2$;

б) $D\!:\ y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=1$, $y=4x$, $z\ge 0$, $z=\sqrt{3y}$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, $V: 1\le x^2+y^2\le 36, y\ge x, x\ge 0, z\ge 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=15x$

б) $z=x^2,\ x-2y+2=0,\ x+y-7=0,\ z\ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OA}} (x^2+y^2)\,dx+2xydy$, де L_{OA} – дуга кубічної параболи $y=x^3$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$;

б) $\int\limits_L \sqrt{\frac{y}{4}+x^2}\,dl$, де L – частина дуги $x=\cos t,\ y=2\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x+y+4z)\,dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p): 3x+3y+z=3$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, який обмежений площиною $z=2$.

18. Дана функція $u(M)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ і точки $M_1(-1,2,1)$, $M_2(3,1,-1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=2xi+2yj+zk$, $S:\begin{cases} y=x^2,\ y=4x^2,\ y=1\ (x\ge 0) \\ z=y,\ z=0 \end{cases}$

б) $a=x^2i+y^2j+z^2k$, $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0) \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(y+z)\vec{i}+xj+(y-2z)\vec{k}$, $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x+2y+z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$

$a(M)=yzi+2xzj+xyk$, $Г:\begin{cases} z=x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=9\ (z>0) \end{cases}$

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)\,\mathbf{tg}\,\frac{\pi}{3^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$ **г)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln 2n}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n^2}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{x}\,\mathbf{cos}\,x\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням *x* розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x^3+y^2,\ \ y(0)=1/2$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}-x+1/2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=4x-2,\ \ x\in(-2,2)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2-2$, задану в інтервалі $(0;\pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 1,\ y=\ln x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}dy\int\limits_0^{\arcsin y}f\,dx+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1}dy\int\limits_0^{\arccos y}f\,dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D\left(8x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

б) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $D:\ y=2-x,\ y=x,\ x\ge 0$

в) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ x\le 0,\ y\ge 0$;

б) $D:\ x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x = 3,\ y = x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 3x^2 + y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ \ V: x^2 + y^2 + z^2 = 32,\ y^2 = x^2 + z^2,\ y \ge 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x + y = 2,\ y = \sqrt{x},\ z = 12y,\ z = 0$ **б)** $z = 2x^2 + 3y^2,\ y = x^2,\ y = x,\ z \ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\oint\limits_L (x + 2y)\,dx + (x - y)\,dy$, де L – парабола $y = 2x^2$, від (0, 0) до (1, 2);

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\,dl$, де L – дуга кривої $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (x + 2y + 3z)\,dS,$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): x + y + z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (z + 1)\,dxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона поверхні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \le 0$.

18. Дана функція $u(M) = z\mathbf{e}^{x^3 + y^2 + z^2}$ і точки $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(3, -4, 2)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = 3xi - zj,$ $S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \ \ (z \ge 0) \end{cases}$

б) $a = x^2 i + yj + (x/z)k,$ $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \ \ (z \ge 0). \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (y - z)i + (x + 2y)j + yk,$ $\varGamma$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x + 3y + 2z = 6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $\varGamma$ $a(M) = xi + 2xzj - xk,\ \ \varGamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{3^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arcsin}\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\,\mathbf{ln}^2(3n+4)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+4}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+8)^n}{n^2}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{cos}\frac{2x^3}{3}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,2}\frac{\mathbf{arctg}\,x}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x+y^2$, $y(0)=-1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x/2+1, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=3x-1$, $x\in(-1,1)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2-1$, задану в інтервалі $(0;\ \pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ x^2=2-y,\ x+y=0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}}f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D(36x^2y^2-96x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

б) $\iint\limits_D(x^3-2y)\,dxdy$, $D:\ y=x^2-1,\ x\ge 0,\ y\le 0$

в) $\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=8/(x^2+4),\ x^2=4y$;

б) $D:\ x^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $y = 2x,\ y = 2,\ z \geq 0,\ z = 2\sqrt{x}$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ V: x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 = y^2 + z^2,\ x \geq 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x = 20\sqrt{2y},\ x = 5\sqrt{2y},\ z = 0,\ z + y = 1/2$

б) $y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\oint\limits_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, де L – дуга $y = \sqrt{x}$ від (0, 0), до (4, 2);

б) $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dl$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (3x - 2y + 6z)dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x + y + 2z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S xdydz + xzdxdz + xydxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$.

18. Дана функція $u(M) = \ln(xy + yz + xz)$ і точки $M_1(-2, 3, -1)$, $M_2(2, 1, -3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (x + y)i + yj - xk,\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, & (z \geq 0) \\ z = 2 \end{cases}$

б) $a = xzi + zj + yk,\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (y + z)i + (x + 6y)j + yk$, $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x + 2y + 2z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$

$a(M) = (x - y)i + xj - zk,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2}{(2n)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(n+2)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{n^4}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+x)^n}{n^2+1}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=2/(1-3x^2)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{x}\ln(1+x^3)dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x+x^2+y^2,\ \ y(0)=1.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=1-2x,\ \ x\in[-2, 2].$

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-1)^2$, задану в інтервалі $(0;\ \pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}fdx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y}}fdx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(8x^2y^2+32x^3y^3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D(y-x)dxdy$, $D:\ y=x,\ y=x^2$

в) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}\frac{xy}{x^2+y^2}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=x^2+1,\ x+y=3$;

б) $D:\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=0,\ y=x,\ y=5,\ z\geq 0,\ z=2x^2+y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ \ V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 16,\ y\leq\sqrt{3}x,\ y\geq 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x=5\sqrt{y}/2,\ x=5y/6,$ $z=0,\ z=\left(5+5\sqrt{y}\right)/6$

б) $z=x,\ y=4, x=\sqrt{25-y^2},$ $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}}(xy-1)dx+x^2y\,dy$, де L_{AB} – дуга параболи $x=2\sqrt{y}$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 4)$;

б) $\int\limits_L (x+z)\,dl$, де L – дуга кривої $x=t$, $y=\left(3/\sqrt{2}\right)t^2$, $z=t^3,\ 0\leq t\leq 1$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+5y-z)\,dS,$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): x+2y+z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=16$, яка лежить в першому октанті.

18. Дана функція $u(M)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,2,1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=xi-(x+2y)j+yk,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2=1,\ z=0, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$

б) $a=3xzi-2xi+yk,$ $S:\begin{cases} x+y+z=2,\ x=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(y+z)i+(x-z)j+(y+3z)k,$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x+y+3z=6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру *Г* $a(M)=yi-xj+z^2k,\ \ \Gamma:\begin{cases} z=3(x^2+y^2)+1, \\ z=4. \end{cases}$

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arctg}\frac{1}{5^n}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+n)\,\mathbf{ln}(3n)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n^2}+1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)}{3^n}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{e}^{\sqrt{3x}}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 x^2\,\mathbf{sin}\sqrt{x}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = 2\mathbf{cos}x - xy^2,\ \ y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 3-x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=2-3x,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x+1)^2$, задану в інтервалі $(0;\pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D\colon\ y=x^2-2,\ y=x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}}f dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}}f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D\left(8x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$, $D\colon\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D(x+y)\,dxdy$, $D\colon\ y^2=x,\ 5y=x$

в) $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathbf{cos}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D\colon\ y^2=4x,\ x^2=4y$;

б) $D\colon\ y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 1,\ z \ge 0,\ x + y + z = 3$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат: $\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ V: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ y \ge 0$.

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 2,\ x = \sqrt{y},\ x = 0,\ z = 0,\ z = 30y$

б) $y = \sqrt{x},\ y = x,\ x + y + z = 2,\ z \ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OBA}} 2xy\,dx - x^2 dy$, де L_{OBA} – ломана OBA; $O(0, 0)$; $B(2, 0)$; $A(2, 1)$.

б) $\int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,dl$, де L – крива $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0; \pi]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x - 8y - z)\,dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x - 3y + z = 6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$.

18. Дана функція $u(M) = x^2 y + xz^2 - 2$ і точки $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(2, -1, 3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = 2(x - y)i + (x - z)k,\quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1,\ z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

б) $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\quad S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 6,\ (z \ge 0) \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (3x + y)i + (x + z)j + yk$, Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x + 2y + z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру Γ

$$a(M) = yzi + 2xzj + y^2 k,\quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16,\ (z > 0) \end{cases}$$

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2^n\cdot n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n/(n+1)\right)^{n^2}}{2^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(3n-1)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n^2-1}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^3+n}{n^3+2}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/(1+\sqrt{x})$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathbf{e}^{-x^2/2}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = \mathbf{e}^x - y^2,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases} x-2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=3-2x,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2+1$, задану в інтервалі $(0;\ \pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x\ge 0,\ y\ge 1,\ y\le 3,\ y=x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx+\int\limits_1^{\mathbf{e}} dy\int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D (7x^2y^2+48x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

б) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, $D:\ y=x^2-1,\ y=-x^2+1$

в) $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathbf{tg}(x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=\cos x,\ y\le x+1,\ y\ge 0$;

б) $D:\ x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ z \ge 0,\ x = 3\sqrt{z}$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz,\quad V: x \ge 0, z \ge 0,\ y \ge \sqrt{3}x,\ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x + y = 2,\ x = \sqrt{y},$ $z = 12x/5,\ z = 0$

б) $y = 1 - x^2,\ x + y + z = 3,$ $y \ge 0,\ z \ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OB}} (x^2 - y^2)\,dx + xydy$, де L_{OB} – відрізок прямої OB; $O(1, 1)$; $B(3, 4)$.

б) $\int\limits_L (x + y)\,dl$, де L: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0; \pi/3]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (3y - x - z)\,dS,$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x - y + z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$ по поверхні S, де S – частина площини $x^2 + y^2 = z^2$, яка знаходиться між площинами $z = 0,\ z = -1$ (нормаль зовнішня).

18. Дана функція $u(M) = x\mathbf{e}^y + y\mathbf{e}^x - z^2$ і точки $M_1(3,\ 0,\ 2)$, $M_2(4,\ 1,\ 3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = xi + zj - yk,$ $S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2), \end{cases}$

б) $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k,$ $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (x + z)\,i + zj + (2x - y)\,k,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x + 2y + z = 4$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$ $a(M) = xyi + yzj + zxk,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n+5)\ln^3(n-2)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(x+2)^n$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos(2x^3)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x+y+y^2$, $y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ б) $f(x)=1-4x$, $x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2-4$, задану в інтервалі $(0;\pi)$, довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями D: $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\le 1$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}}f\,dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_0^{x^2}f\,dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D(4xy+3x^2y^2)\,dxdy$ D: $x=1$, $y=x^2$, $y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy$ D: $y=5x$, $y=x$, $x=3$

в) $\int\limits_0^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\cos(x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) D: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\ge 0$;

б) D: $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$, $y=x$, $x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=5,\ y=x/5,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=x^2+5y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V \frac{y^2 z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dxdydz,\ \ V:y\geq 0, y\leq\sqrt{3}x,\ z=3(x^2+y^2),\ z=3.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y=17\sqrt{2x},\ y=2\sqrt{2x},$
$z=0,\ x+z=1/2$

б) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} \mathbf{cos}\, y dx-\mathbf{sin}\, x dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(2\pi, -2\pi)$; $B(-2\pi, 2\pi)$.

б) $\int\limits_L xydl$, де L – перша четверть еліпса $x^2/4+y^2/9=1$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (y-2x-2z)\,dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ 2x-y-2z=-2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S yzdxdy+xzdydz+xydxdz$ по поверхні S, де S – частина поверхні $x^2+y^2=3z$, яка відрізана площиною $z=3$ (нормаль зовнішня).

18. Дана функція $u(M)=3xy^2+z^2-xyz$ і точки $M_1(1, 1, 2)$, $M_2(3, -1, 4)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=zi-4yj+2yk,$
$$S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$$

б) $a=(x+y)i+(y-x)j+(x^2+y^2)k,$
$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0\ \ (z\geq 0). \end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+z)i+(x+3y)j+yk,$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+y+2z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру *Г*

$$a(M)=yzi+(-x)j-zk,\ \ Г:\begin{cases} x^2+y^2=4z^2, \\ x^2+y^2=1\ \ (z>0). \end{cases}$$

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)\,\mathbf{ln}(6n-2)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\mathbf{ln}(n+1)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot n^2}{2^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/\sqrt{\mathbf{e}^x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{xdx}{1+x^5}$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=(4x-3)/2$, $x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-2)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями D: $x\ge 0$, $y\ge x$, $y=\sqrt{9-x^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}fdy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}fdy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D(2xy+9x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x$

б) $\iint\limits_D(x-2)\,ydxdy$, D: $y=x$, $y=x/2$, $x=2$

в) $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathbf{sin}\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) D: $y=x^2+2$, $x\ge 0$, $x=2$, $y=x$;

б) D: $z=4-x^2$, $x^2+y^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=2,\ y=4x,\ z\ge 0,\ y=2\sqrt{z}$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x^2\Big/\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2+z^2=16, z\ge 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y=5\sqrt{x}/3,\ y=5x/9,$ $z=0,\ z=5(3+\sqrt{x})/9$

б) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}x$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (ydx+xdy)/(x^2+y^2)$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(1, 2)$; $B(3, 6)$.

б) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – четверта частина кола $x^2+y^2=R^2$, яка лежить в першій чверті.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x-3y+z)\,dS$, по поверхні S, де S – частина площини $(p): x+2y+z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболи $z=x^2+y^2$ (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка вирізана циліндром $x^2+y^2=1$.

18. Дана функція $u(M)=5x^2yz-xy^2z+yz^2$ і точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(9, -3, 9)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=4xi-2yj-zk,$ $S:\begin{cases}3x+2y=12,\ 3x+y=6,\ y=0\\ x+y+z=6,\ z=0.\end{cases}$

б) $a=y^2xi+z^2yj+x^2zk,$ $S: x^2+y^2+z^2=1$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(y-z)i+(x+y)j+xk,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+2y+2z=4$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$ $a(M)=yi-xj+z^2k,$ $Г:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=4.\end{cases}$

Варіант 11

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{2\pi}{3^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+3))^n}$ **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$ **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+4)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n(n-2)}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{n(n+1)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^{n+2}}{n^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin(x^4)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^1 x\sqrt[3]{1+x^2/4}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x^2y^2+y\sin x,\ \ y(0)=1/2$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=1-x/2,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-3)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y^2=2-x,\ y=x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^{1} f\,dy+\int_1^{e} dx\int_{\ln x}^{1} f\,dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint_D(xy+9x^2y^2)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

б) $\iint_D(x-y^2)\,dxdy$, $D:\ y=x^2,\ y=1$

в) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=4x^2,\ 9y=x^2,\ y\le 2$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x=3,\ y=x/3,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=(x^2+y^2)/2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V (z)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: z=2(x^2+y^2),\ y\ge 0,\ y\le x/\sqrt{3},\ z=18.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2+y^2=8,\ y=\sqrt{2x},\ y=0$, $z=0,\ z=15x/11$

б) $2x+3y-12=0,\ 2z=y^2$, $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{AB} – дуга кубічної параболи $y=x^3$ від точки *A*(0, 0) до точки *B*(1, 1).

б) $\int\limits_L dl/(x-z)$, де *L* – відрізок прямої $z=-2z,\ y=0$, яка з'єднує точки *A*(0, 0, –2) і *B*(4, 0, 0).

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (x+y-z)\,dS$, по поверхні *S*, де *S* – частина площини $(p):\ x+2y+2z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (x^2+y^2)z\,dxdy$ по поверхні *S*, де *S* – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

18. Дана функція $u(M)=x/(x^2+y^2+z^2)$ і точки M_1(1, 2, 2), M_2(–3, 2, –1). Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** **grad** $u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню *S* (нормаль зовнішня):

а) $a=8xi-2yj+xk,$ $S:\begin{cases} x+y=1,\ x=0,\ y=0 \\ z=x^2+y^2,\ z=0. \end{cases}$

б) $a=x^2i+y^2j+z^2k,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (\text{октанта}) \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(x+z)\vec{k},$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+y+2z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г* $a(M)=4xi+2j-xyk,\ \ Г:\begin{cases} z=(x^2+y^2)+1, \\ z=7. \end{cases}$

Варіант 12

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+5}{6n^2-n}\right)^{n^2}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\mathbf{ln}(n+3)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{3^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{e}^{-x^4}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{\mathbf{sin}\,x^2}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням *x* розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=2y^2+y\mathbf{e}^x,\;\; y(0)=1/3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=x/2+1,\;\; x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-4)^2/4$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\; x=\sqrt{2-y^2},\; x=y^2,\; y\ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D(4xy+18x^2y^2)\,dxdy$, $D:\; x=1,\; y=x^3,\; y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, $D:\; y=2x^3,\; y=0,\; x=1$

в) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(1+x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\; y=x^2,\; y=-x$;

б) $D:\; x^2-2x+y^2=0,\; x^2-6x+y^2=0,\; y=x/\sqrt{3},\; y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x=4,\ y=x/4,\ z\ge 0,\ z=4y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V xy\Big/\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdydz,\quad V: z=x^2+y^2,\ y\ge 0,\ y\le x,\ z=4.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},$ $z=3y,\ z=0.$

б) $z=10+x^2+2y^2,\ y=x,$ $x=1,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{ABC}}(x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, де L_{ABC} – ломана *ABC* *A*(1, 2); *B*(3, 2); *C*(3, 5).

б) $\int\limits_L\sqrt{2y}\,dl$, де *L* – перша арка циклоїда $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0, 2\pi]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S(3x+2y+2z)dS,$ по поверхні *S*, де *S* – частина площини (p): $3x+2y+2z=6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz+z^2dxdy$ по поверхні *S*, де *S* – частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$ (нормальний вектор *n* якої утворює тупий кут з ортом *k*), яка лежить між плоскостями $z=0,\ z=1$.

18. Дана функція $u(M)=y^2z-2xyz+z^2$ і точки M_1(3, 1, –1), M_2(–2, 1, 4). Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню *S* (нормаль зовнішня):

а) $a=zi+xj-zk,$ $S:\begin{cases}4z=x^2+y^2,\\ z=4.\end{cases}$

б) $a=x^2i+xyj+3zk,$ $S:\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ z=4.\end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(2x-z)i+(y-x)j+(x+2z)k,$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x-y+z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г* $a(M)=2yi-3xj+z^2k,$ $Г:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1.\end{cases}$

Варіант 13

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(3n-1)}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3n-1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(x+1)^n}{n+1}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos(\sqrt{x}/2)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=e^{3x}+2xy^2,\ \ y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ (\pi-x)/2, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{2x+1}{2},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x^2/4)-1$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ x+2y-12=0,\ y=\lg x,\ y\ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{\pi/4}dy\int\limits_{0}^{\sin y}fdx+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}dy\int\limits_{0}^{\cos y}fdx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D(2xy+27x^2y^2)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dxdy$, $D:\ x=y^2,\ x=1$

в) $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{dy}{1+x^2+y^2}$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=y^2,\ x=(3y^2/4)+1$;

б) $D:\ y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x\ge 0,\ y=3x,\ y=3,\ z\ge 0,\ z=2(x^2+y^2)$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V 1/\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdydz,\quad V: x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x=19\sqrt{2y},\ x=4\sqrt{2y},$
$z=0,\ z+y=2.$

б) $z=x^2,\ x+y=6,$
$y=2x,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yx^2dy$, де L_{OB} – відрізок прямої OB $O(0, 0)$; $B(-2, 4)$.

б) $\oint\limits_L (x-y)\,dl$, де L – коло $x^2+y^2=a^2$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини (p): $2x+y+z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (y^2-z)\,dxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболи $z=x^2+y^2$ (нормальний вектор *n* якої утворює тупий кут з ортом *k*), яка відрізана площиною $z=2$.

18. Дана функція $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz$ і точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=6xi-2yj-zk,$
$$S:\begin{cases} z=3-2(x^2+y^2), \\ z^2=x^2+y^2\quad (z\ge 0). \end{cases}$$

б) $a=(2x+y)i+(xy-z)j+(x^2+yz)k,$
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+y+z)i+2zj+(y-7z)k$, Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x+3y+z=6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*
$$a(M)=-3zi+y^2j+2yk,\quad \Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x-3y-2z=1. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{n!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{sin}\frac{\pi}{n}\right)^{2n}$ **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\,\mathbf{ln}(n+2)}$ **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(n+1)!}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-2)^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\cdot\mathbf{sin}\frac{\pi}{2^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{e}^{\sqrt{x}}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^{0,5}x^2\,\mathbf{cos}(3x)\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x+\mathbf{e}^y$, $y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{x-2}{2}$, $x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=4-x^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями D: $x\le 0$, $y\ge 1$, $y\le 3$, $y=-x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int_{-2}^{-1}dx\int_{-(2+x)}^{0}f\,dy+\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt[3]{x}}^{0}f\,dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint_D(3xy+18x^2y^2)\,dxdy$, D: $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-1$ **б)** $\iint_D xy\,dxdy$, D: $y=x^3$, $y=0$, $x\le 2$ **в)** $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) D: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$;

б) D: $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3x}$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \geq 0,\ y = 4x,\ y = 8,\ z \geq 0,\ z = 3x^2 + y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V y\big/\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ y\geq 0,\ z\geq 0 .$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x = 5\sqrt{y}/6,\ x = 5y/18,$ $z = 0,\ z = 5(3+\sqrt{y})/18.$

б) $z = 3x^2 + 2y^2 + 1,\ y = x^2 - 1,$ $y = 1,\ z \geq 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L_{OA} – дуга кривої $x = y^2$ від точки (0, 0) до точки (1, 1).

б) $\int\limits_L dl\big/(x^2+y^2+z^2)$, де L – виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt,\ t \in [0, \pi/2]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x + 2y + z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x + y + z = 4$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S dxdy\big/\sqrt{x^2+y^2-1}$ по поверхні S, де S – частина поверхні $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ (нормальний вектор n якої утворює гострий кут з ортом k), яка відділена площинами $z = 0,\ z = 1$.

18. Дана функція $u(M) = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$ і точки $M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(3,\ -5,\ 1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (x + y)i + (x - z)j + zk,$ $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12,\ z = 1. \end{cases}$

б) $a = xy^2 i + x^2 yj + zk,$ $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z,\ z = 0,\ z = 1, \\ x = 0,\ y = 1,\ (1\ \text{октанта}). \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру Γ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (x + y)i + (y + z)j + 2(x + z)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $3x - 2y + 2z = 6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру Γ $a(M) = 2yi + j - 2yzk,\ \ \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

Варіант 15

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+3)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{4n}\right)^{3n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\ln(10n+5)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n(2n-1)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{2n+3}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2-1}\cdot x^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3-2x)^n}{n^3+1}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos\sqrt[3]{x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{x}\ln(1+x^2)\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = y\cos x + 2\cos y,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\dfrac{3x-2}{2},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-1)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y=0,\ y\ge x,\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx+\int\limits_1^{e} dy\int\limits_{\ln y}^{1} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(4xy/5+19x^2y^2/11)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D(x+y)\,dxdy$, $D:\ y=x^3,\ y=8,\ y=0,\ x=3$

в) $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0}\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=x^2+4x,\ \ y=x+4$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y = 5x,\ y = 10,\ z \ge 0,\ z = x^2 + y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x/\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=16y,\ y+z=16,\ x\ge 0,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2+y^2=8,\ x=\sqrt{2y},\ x=0,$ $z=30y/11,\ z=0.$

б) $3y=\sqrt{x},\ y\le x,$ $x+y+z=10,\ y=1,\ z=0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OA}} xydx+(y-x)dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y^2=x$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

б) $\int\limits_L z^2dl/x^2+y^2$, де L – виток гвинтової лінії $x=a\cos t,$ $y=a\sin t,\ z=at,\ t\in[0,\ 2\pi]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+8y+8z)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x+4y+2z=8$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S xydydz+yzdxdz+xzdxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка лежить в першому октанті.

18. Дана функція $u(M)=x^2+2y^2-4z^2-5$ і точки $M_1(1,\ 2,\ 1)$, $M_2(-3, -2, 6)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=(y+2z)i-yj+3xk,$ $S:\begin{cases}3z=27-2(x^2+y^2),\\ z=x^2+y^2,\ (z\ge 0).\end{cases}$

б) $a=xyi+yzj+zxk,$ $S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+y^2=z^2,\ (z\ge 0).\end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру Γ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=4zi+(x-y-z)j+(3y+z)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x-2y+2z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру Γ

$$a(M)=2yi+5zj+3xk,\quad \Gamma:\begin{cases}2x^2+2y^2=1,\\ x+y+z=3.\end{cases}$$

Варіант 16

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \mathbf{tg}\frac{2\pi}{5^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\left((n+1)n\right)^2}$ **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$ **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{ln}\,n\,(n+4)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3}}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{sin}^2 3x$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^{0,4} \sqrt{x}\,\mathbf{e}^{-x/4}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = x^2 + 2y^2,\;\; y(0)=0{,}2$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{2x+1}{5},\;\; x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-3)^2+1$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D\colon\; y\ge 0,\; x=\sqrt{y},\; y=\sqrt{8-x^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint_D (xy/5+9x^2y^2)\,dxdy$, $D\colon\; x=1,\; y=\sqrt{x},\; y=-x$

б) $\iint_D x(x+y)\,dxdy$, $D\colon\; y=1-x^2,\; y=0$

в) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{cos}^2\sqrt{x^2+y^2}}$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D\colon\; 2y=\sqrt{x},\; x+y=5,\; x\ge 0$;

б) $D\colon\; x^2-2x+y^2=0,\; x^2-4x+y^2=0,\; y=0,\; y=x/\sqrt{3}$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x=y,\ y=-x,\ y=2,\ z\ge 0,\ z=3(x^2+y^2)$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x+y=4,\ x=\sqrt{2y},$ $z=3x/5,\ z=0.$

б) $y^2=1-x,\ x+y+z=1,\ x=0,$ $z=0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} xdx+(x-y+1)dy$, де L_{AB} – відрізок прямої *AB*; *A*(1, 1); *B*(2, 3).

б) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де *L* – розгортка кола $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (4y-x+4z)\,dS$ по поверхні *S*, де *S* – частина площини $(p):\ x-2y+2z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz+zdxdy$ по поверхні *S*, де *S* – частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, (нормальний вектор *n* якої утворює тупий кут з ортом *k*), яка відділена площиною $z=4$.

18. Дана функція $u(M)=\ln(x^3+y^3+z+1)$ і точки M_1(1, 3, 0), M_2(–4, 1, 3). Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню *S* (нормаль зовнішня):

а) $a=(y+6x)i+5(x+z)j+4yk,$ $S:\begin{cases} y=x,\ y=2x,\ y=2, \\ z=x^2+y^2,\ (z=0). \end{cases}$

б) $a=3x^2i-2x^2yj+(2x-1)zk,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(2z-x)i+(x+2y)j+3zk,$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+4y+2z=8$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M)=(x-y)i+xj+z^2k,\ \ \Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^3}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt[3]{\ln 2n}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{2n^2+1}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{2n^3+1}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/(1-x^2)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_{0,3}^{0,5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням *x* розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x^2+xy+y^2,\ \ y(0)=0{,}5$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{4x+1}{3},\ \ x\in(-2,2)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x^2+3)$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ y=-x,\ y^2=x+3$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^{0} f dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D (4xy-48x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D y(1-x)\,dxdy$, $D:\ y^3=x,\ y=x$

в) $\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=2,\ x=0$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x=1,\ y=2x,\ y=3x,\ z\ge 0,\ z=2x^2+y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:
$$\iiint_V xydxdydz,\ \ V: 2 \le x^2+y^2+z^2 \le 8,\ z^2 = x^2+y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y = 6\sqrt{3x},\ y = \sqrt{3x},\ z = 0,\ x + z = 3.$

б) $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 3x + 2y + 6,\ z = 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (y-1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1, 0)$; до точки $B(0, 2)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, який з'єднує точки $A(0, -2)$ і $B(4, 0)$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (x + y + 2z)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): 3x - 2y + 2z = 6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz - zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відділена площинами $z = 0,\ z = 3$.

18. Дана функція $u(M) = x - 2y + e^z$ і точки $M_1(-4, -5, 0)$, $M_2(2, 3, 4)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = yi + 5yj + zk,\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1/4, \\ z = x,\ z = 0\ (z \ge 0). \end{cases}$

б) $a = x^2i + y^2j + 2zk,\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2/4, \\ z = 2. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = 4xi + (x - y - z)j + (3y + 2z)k,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x + y + z = 4$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$
$$a(M) = xzi - j + yk,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ z = 1. \end{cases}$$

Варіант 18

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+3)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+8)(n+3)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n^2+1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n^2+1)}{n(n+1)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(nx)^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{2^n(n-1)}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/(1-3x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\mathbf{arctg}\,x^2}{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=\mathbf{e}^{\sin x}+x,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\dfrac{1-2x}{5},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-1)^2/3$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ x\ge 0,\ x=1,\ y=0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^3} f dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D (xy+24x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x$

б) $\iint\limits_D xy^3dxdy$, $D:\ y^2=1-x,\ x\ge 0$

в) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=-2x^2+2,\ y\ge -6$;

б) $D:\ x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $y=x,\ y=-2x,\ y=1,\ z\ge 0,\ z=x^2+4y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ z=6.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y=5\sqrt{x}/6,\ y=5x/18,$ $z=0,\ z=5\left(3+\sqrt{3}\right)/18.$

б) $x^2=1-y,\ x+y+z=3,\ y\ge 0,$ $z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(0, 0)$; до точки $B(1, 1)$.

б) $\int\limits_L dl/\left(x^2+y^2+z^2\right)$, де L – перший виток гвинтової лінії $x=5\cos t,$ $y=5\sin t,\ z=t$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+3y+z)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x+3y+z=6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz-z^2dxdz+zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболоїда $z=3-x^2-y^2$, (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відділена площиною $z=0$.

18. Дана функція $u(M)=x^y-3xyz$ і точки $M_1(2,\ 2,\ -4)$, $M_2(1,\ 0,\ -3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=zi+(3y-x)j-zk,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=x^2+y^2+2,\ z=0. \end{cases}$

б) $a=xyi+yzj+xzk,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+2z)i+(y-3z)j+zk,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $3x+2y+2z=6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$ $a(M)=2yzi+xzj-x^2k,$ $Г:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=9\ (z>0). \end{cases}$

Варіант 19

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arcsin}\frac{1}{3^n}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)\,\mathbf{ln}^5(3+2n)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathbf{sin}(2n^2+5)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(6n+1)^n}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{x^{n+1}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{n}\cdot(x-2)^n}{n+1}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{e}^{x^3}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,8}\frac{1-\mathbf{cos}\,x}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=xy-y^2,\ \ y(0)=0{,}2$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=(1-3x)/7,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-4)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x=-1,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^3 dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(4xy+16x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

б) $\iint\limits_D x(y+5)\,dxdy$, $D:\ y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0$

в) $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\mathbf{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y^2=4x,\ x=8/(y^2+4)$;

б) $D:\ y^2-4y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ y=x/\sqrt{3}$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 1,\ z = 3x^2 + 2y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2 + y^2 + z^2 = 36,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y \le -x.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 18,\ y = \sqrt{3x},$ $y = 0,\ z = 0,\ z = 5x/11.$

б) $x = y^2,\ x = 1,\ x + y + z = 4,$ $z = 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (xy - y^2)\,dx + x\,dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(0,\ 0)$; до точки $B(1,\ 1)$.

б) $\int\limits_{L_{OABC}} yz\,dl$, де L_{OABC} – відрізок OA з вершинами в точках $O(0, 0, 0)$; $A(0,\ 4,\ 0)$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (4x - y + z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x - y + z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S y^2 dydz - x^2 dxdz - z^2 dxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відділена площинами $z = 0,\ z = 1$.

18. Дана функція $u(M) = 3x^2yz^3$ і точки $M_1(-2,\ -3,\ 1)$, $M_2(5,\ -2,\ 0)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = yi + (x + 2y)j + xk,$ $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = x^2 + y^2,\ z = 0. \end{cases}$

б) $a = xyi + yzj + xzk,$ $\quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ \text{(октанта)}. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = xi + (y - 2z)j + (x - y + 2z)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x + 2y + 2z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M) = 4xi - yzj + xk,\ \ \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Варіант 20

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{(2n)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln 3n}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+5)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2(n-1)}}{2n\cdot 4^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/(1-\sqrt[3]{x})$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = 2x + y^2 + e^x$, $y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=3-4x,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-1)^2/7$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y\le 0,\ x^2=-y,\ x=\sqrt{1-y^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-(2+y)}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0}fdx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(4xy+16x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D(x-y)\,dxdy$, $D:\ y=x^2-1,\ y=3$

в) $\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\frac{xydy}{x^2+y^2}$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=4-x^2,\ y=x^2-2x$;

б) $D:\ x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 3x + 2y = 6,\ z = x^2 + y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x\Big/\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ z\ge 0,\ z=4,\ y\ge 0,\ y\le x.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x + y = 6,\ y = \sqrt{3x},$ $z = 4y,\ z = 0.$

б) $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,$ $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{AB} – дуга кривої $y = 2x^2 - 2$ від точки $A(0, -2)$; до точки $B(1, 0)$.

б) $\int\limits_L x^2 dl$, де L – дуга верхньої половини кола $x^2 + y^2 = a^2$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x - y + 8z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x + y + 2z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2 dydz + 2y^2 dxdz - zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболи $z = x^2 + y^2$, (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відділена площиною $z = 1$.

18. Дана функція $u(M) = \mathbf{e}^{xy+z^3}$ і точки $M_1(-5,\ 0,\ 2)$, $M_2(2,\ 4,\ -3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (x + yz)i + (2y - x)j + (3z + y)k,$
$$S: \begin{cases} y = x,\ y = 2x,\ x = 1, \\ z = x^2 + y^2,\ z = 0. \end{cases}$$

б) $a = zi + yzj - xyk,$
$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0,\ z = 1. \end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (y - z)i + (2x + y)j + zk$, $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x + y + z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$
$$a(M) = -yi + 2j + k,\ \ Г: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Варіант 21

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{\pi}{4^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n}{7n^2+4}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{([illegible]n-4)\ln^2([illegible]n-4)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin(x/3^n)$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{n^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos([illegible]/x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x\sin x-y^2,\ \ y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{2x+1}{10},\ \ x\in(-2,2)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x^2/3)-1$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y\ge 0,\ y\le 1,\ y=x,\ x=-\sqrt{4-y^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f dx+\int\limits_1^{e}dy\int\limits_{\ln y}^1 f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(4xy+16x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D(x+1)y^2\,dxdy$, $D:\ y=3x^2,\ y=3$

в) $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0}\cos(x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=y^2+1,\ x+y=3$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y=2,\ z=4-x^2-y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V z\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ y \geq 0,\ y \leq x\big/\sqrt{3},\ z \geq 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},$ $z=0,\ z+y=3.$ **б)** $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,$ $y=x,\ x=0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx + x^2dy/2$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2=4x$ від точки $A(0, 0)$; до точки $B(1, 2)$.

б) $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, де L – виток гвинтової лінії $x=4\cos t,\ y=4\sin t,$, $z=3t,\ t\in[0,\ 2\pi]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (4x-4y-z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x+2y+2z=4$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S 2xdydz+(1-z)\,dxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні $x^2+y^2=4z$, яка відділена площинами $z=0,\ z=1.$

18. Дана функція $u(M)=x^{yz}$ і точки $M_1(3, 1, 4)$, $M_2(1, –1, –1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=7xi+zj+(x-y+5z)k,$ $S:\begin{cases} z=x^2+y^2,\ z=x^2+2y^2, \\ y=x,\ y=2x,\ x=1. \end{cases}$

б) $a=(x+y)i-(y-x)j+(x^2+y^2)k,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0,\ z\geq 0. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+y-z)i-2yj+(x+2z)k,$ $\mathit{\Gamma}$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+2y+z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M)=yi+3xj+z^2k,\quad \mathit{\Gamma}:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$$

Варіант 22

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3+n}{n^2-2n}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln^3(n+3)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{\ln(n+1)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin(3x/2)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=2x^2-xy,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{1-2x}{10},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=3-x^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ x\le 0,\ y=1,\ y=4,\ y=-x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^{\pi/4}dx\int\limits_0^{\sin x}fdy+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}dx\int\limits_0^{\cos x}fdy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_D (y-4x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $D:\ y=x,\ y=0,\ x=1$

в) $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sin(x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x^2=3y,\ y^2=3x$;

б) $D:\ y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y=3,\ z=9-x^2-y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2-2x+y^2=0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+z=2.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2+y^2=50,\ y=\sqrt{5x},$ $y=0,\ z=0,\ z=3x/11.$

б) $y=2x,\ x+y+z=2,$ $x\ge 0,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2ydy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB $A(1,\ 0)$; до точки $B(0,\ 2)$.

б) $\int\limits_L (x-2y)dl$, де L – дуга кривої $x=2\mathbf{cos}t,\ y=2\mathbf{sin}t,\ t\in[0,\ \pi/4]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+5y+z)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): x+y+2z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S 2xdydz-ydxdz+zdxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона поверхні, яка утворена параболоїдом $3z=x^2+y^2,\ z\le 3$.

18. Дана функція $u(M)=(x^2+y^2+z^2)^3$ і точки $M_1(1,\ 2,\ -1)$, $M_2(0,\ -1,\ 3)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=17xi+7yj+11zk,$
$$S:\begin{cases} z=x^2+y^2,\ z=2(x^2+y^2), \\ y=x^2,\ y=x. \end{cases}$$

б) $a=(x^2+xy)i+(y^2+yz)j+(z^2+xz)k,$
$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2=z^2,\ (z\ge 0). \end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+y)i+3yj+(y-z)k,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x-y-2z=-2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$
$$a(M)=2yzi+xzj+y^2k,\ \ Г:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16,\ (z>0). \end{cases}$$

Варіант 23

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$ **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{5n(n+1)}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{8^n}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n(2n+1)^n}{n^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\ln(5x+1)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^1\sqrt{x}\sin x\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=x-2y^2,\ \ y(0)=0{,}5$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 4-9x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{3x+1}{5},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(2x^2/3)-1$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ y=3-x^2,\ y=-x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint_D (4xy+176x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=-x,\ y=\sqrt[3]{x}$

б) $\iint_D (x^3+y)\,dxdy$, $D:\ x+y=1,\ x+y=2,\ x\le 1,\ x\ge 0$

в) $\int_{-1}^{1} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=\cos y,\ x\le y+1,\ x\ge 0$;

б) $D:\ x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область *V* обмежена поверхнями $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ 3x+4y=12,\ z=6-x^2-y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz, \;\; V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16, \;\; y \ge 0, \;\; y \le x, \;\; z \ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x = 5\sqrt{y}/3, \;\; x = 5y/9, \;\; z = 0, \;\; z = 5(3 + \sqrt{y})/9.$

б) $y = 1 - z^2, \;\; y = x, \;\; y = -x, \;\; y \ge 0, \;\; z \ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(2, 4)$ до точки $B(1, 1)$

б) $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, де L_{AB} – дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t, \;\; y = \sin t, \;\; z = 2t, \;\; t \in [0, \pi]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (4x - y + 4z)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): \; 2x + 2y + z = 4$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \;\; z \ge 0$.

18. Дана функція $u(M) = (x - y)^z$ і точки $M_1(1, 5, 0)$, $M_2(3, 7, -2)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = xi - 2yj + 3zk, \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x. \end{cases}$

б) $a = 3x^2 i - 2x^2 j + (-2x)k, \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \;\; z = 1. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру Γ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (2y + z)i + (x - y)j - 2zk$, Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x - y + z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру Γ

$$a(M) = (2 - xy)i - yzj - xzk, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Варіант 24

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2\cdot 2^n}{n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(n-5)^3}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln(3n+2)}}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 3^n}{2n+2}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-2)^{2n}}{2n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos\sqrt[4]{x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{25}\frac{e^{-2x^2}\,dx}{\sqrt{x}}$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}(x/3)-3, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{2-3x}{4}$, $x\in[-2, 2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-3)^2/4$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x=0,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2+4$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{y}^{0} f dx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=-x,\ y=\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D xy^3\,dxdy$, $D:\ y=x^3,\ y\ge 0,\ y=4x$

в) $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{x^2+y^2}\,dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=4-y^2,\ x-y+2=0$;

б) $D:\ y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x\ge 0,\ y=x,\ z\ge 0,\ y=3,\ z=18-x^2-y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V 1\big/\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ \ V: x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2+y^2=18,\ x=\sqrt{3y},$
$x=0,\ z=0,\ z=10y/11.$

б) $x^2+y^2=4y,$
$z^2=4-y,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}} ydx/x+xdy$, де L_{AB} – дуга лінії $y=\mathbf{ln}\,x$ від точки $A(1,\ 0)$ до точки $B(\mathbf{e},\ 1)$.

б) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – відрізок прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ від точки $A(1,\ 0,\ -1)$ до точки $B(3,\ 3,\ 1)$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x+2y+2z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x+2y+z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (x+z)\,dydz+(x+y)\,dxdy$ по поверхні S, де S – зовнішня сторона конуса $x^2+y^2=z^2$, яка відділена площинами $z=0,\ z=2$.

18. Дана функція $u(M)=x^2y+y^2z-3z$ і точки $M_1(0,\ -2,\ -1)$, $M_2(12,\ -5,\ 0)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=(x+y)\,i+(y+2z)\,k,$
$S:\begin{cases} z=2-4(x^2+y^2), \\ z=4(x^2+y^2). \end{cases}$

б) $a=x^2i,$
$S:\begin{cases} z=1-x-y, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(3x-y)\,i+(2y+z)\,j+(2z-x)\,k,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x-3y+z=6$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$

$$a(M)=-yi+xj+3z^2k,\quad Г:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=1,\ (z>0). \end{cases}$$

Варіант 25

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1/n)^{n^2}}{5^n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(n+4)\ln(n+2)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{n^3+2}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n^2+4)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot 2^n/n^n$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=1/\sqrt{1+x^2}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1\sqrt{x}\cos\frac{x^2}{4}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=xy+x^2+y^2,\ \ y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=\frac{2-5x}{4},\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=3/2-x^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x=0,\ (x-3)^2+y^2=1,\ y=0,\ y=1$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^3}fdy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}fdy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(6x^2y^2+25x^4y^4/3)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

б) $\iint\limits_D(x^3+3y)dxdy$, $D:\ x+y=1,\ y=x^2-1,\ x\ge 0$

в) $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=y^2,\ x=\sqrt{2-y^2}$;

б) $D:\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=2,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y=3x,\ z=4(x^2+y^2)$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V y\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ \ V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x+y=6,\ x=\sqrt{3y},$
$z=0,\ z=4x/5.$

б) $x^2+y^2=1,$
$z=2-x^2-y^2,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\oint\limits_L ydx-xdy$, де L – парабола $y=x^2-2x$ від точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(1,-1)$.

б) $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, де L – коло $z^2+y^2=4$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+5y+10z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): 2x+y+3z=6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S 3xdydz-ydxdz-zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболоїда $9-z=x^2+y^2,\ z\ge 0$ (нормальний вектор *n* якої утворює тупий кут з ортом *k*), яка відділена площиною $z=0$.

18. Дана функція $u(M)=10/(x^2+y^2+z^2+1)$ і точки $M_1(-1,\ 2,\ -2)$, $M_2(2,\ 0,\ 1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=(y-3z)i+(3x+2y)j+(x+y+z)k,$
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ z=4-x-y,\ z=0.\end{cases}$$

б) $a=(y^2+xz)i+(yx-z)j+(yz+x)k,$
$$S:\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ z=0,\ z=\sqrt{2}.\end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+z)i+2yj+(x+y-z)k,$ *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+2y+z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M)=yi-xj+2zk,\quad \Gamma:\begin{cases} x^2+y^2-z^2/4=0,\\ z=2.\end{cases}$$

Варіант 26

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n^2+3)}{n!}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)^2$ **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)\mathbf{ln}^3(3+8n)}$ **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{\sqrt{n+5}}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbf{sin}^n \frac{\pi}{6n}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot x^n}$ **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3n-1)(x-2)^n}{(n+1)}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \mathbf{cos}\sqrt[6]{x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int_0^1 x\,\mathbf{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = xy + \mathbf{e}^x$, $y(0) = 0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x) = \begin{cases} 1 - x/4, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$ **б)** $f(x) = \frac{2x-3}{3}$, $x \in [-2, 2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = (x-\pi)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями D: $x = \sqrt{9-y^2}$, $y = x$, $y \ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint_D (x^2y^2 + 25x^4y^4)\,dxdy$, D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$

б) $\iint_D xy\,dxdy$, D: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y = 2$

в) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)} dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) D: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, $y \le \frac{1}{2}x$, $y \ge 0$;

б) D: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 4,\ z \ge 0,\ z = 10 - x^2 - y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=3.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $y=\sqrt{15x},\ y=\sqrt{15}x,$ $z=0,\ z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x})$;

б) $y=x^2,$ $z=0,\ y+z=2.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = x^2/4$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 1)$.

б) $\int\limits_L y^2 dl$, де L – перша арка циклоїда $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+15y+z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): x+2y+2z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (y-x)\,dydz + (z-y)\,dxdz + (x-z)\,dxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні конуса $x^2 = y^2 + z^2$, яка відділена площиною $x = 1,\ (0 \le x \le 1)$.

18. Дана функція $u(M) = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$ і точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(5, -4, 8)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\, u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = -2xi + zj + (x+y)k,$ $S: \begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ z=x^2+y^2,\ z=0. \end{cases}$

б) $a = yi + y^2 j + yzk,$ $S: \begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=1,\ x=0,\ y=0. \end{cases}$ (I октант)

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (y+2z)i + (x+2z)j + (x-2y)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x + y + 2z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M) = x^2 i + yzj + 2zk,\quad \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z=4. \end{cases}$$

Варіант 27

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{5n+1}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n^2+4)\ln n}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n+5)}{3^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+2)}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n+2)}{(x+1)^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin\sqrt{x-1}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = y\mathbf{e}^x$, $y(0)=1$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x/5-2, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ **б)** $f(x)=5-2x,\ \ x\in(-2, 2).$

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x+\pi)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x+2y-6=0,\ y=x,\ y\ge 0$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D \left(8x^2y^2+(50/3)x^4y^4\right)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

б) $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}dxdy$, $D:\ y=x,\ xy=1,\ y=2$

в) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y^2=4-x,\ y=x+2,\ y=2,\ y=-2;$

б) $D:\ y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x=3,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y=2x,\ z=4\sqrt{y}$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V 1\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ \ V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x+y=8,\ y=\sqrt{4x},\ z=3y,\ z=0.$

б) $z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x,\ z\ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{AB}}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, де L_{AB} – ломана лінія $y=|x|$ від точки $O(-1,\,1)$ до точки $A(2,\,2)$.

б) $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L – розгортка кола $x=6(\cos t+t\sin t)$, $y=6(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S(6x+10y-z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ x+3y+2z=6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S 3x^2dydz-y^2dxdz-zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболоїда $1-z=x^2+y^2,\ (z\ge 0)$ (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k).

18. Дана функція $u(M)=(x/y)+(y/z)-(z/x)$ і точки $M_1(-1,\ 1,\ 1)$, $M_2(2,\ 3,\ 4)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля ***a*** через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=(2y-15x)i+(z-y)j-(x-3y)k,$
$S:\begin{cases} z=3x^2+y^2+1,\ z=0, \\ x^2+y^2=1/4. \end{cases}$

б) $a=yi+2zj+2z^2k,$
$S:\begin{cases} x^2+y^2=(1-z)^2,\ z\le 1 \\ z=0. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=(x+z)i+(z-x)j+(x+2y+z)k$, $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x+y+z=2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$ $a(M)=yi-2xj+z^2k,\ \ Г:\begin{cases} z=4(x^2+y^2)+2, \\ z=6. \end{cases}$

Варіант 28

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arctg}\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+3)\mathbf{ln}^2(10n+3)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-3}{n^2-1}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\mathbf{e}^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{cos}3x^2/2$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,4}x\sqrt{1-x^3}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y'=2\mathbf{sin}x+xy,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=7-3x,\ \ x\in[-2,2)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x^2/\pi)-\pi$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ y=-x,\ 3x+y=3,\ y=3$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x fdy+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}}fdy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D(9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_D y(1+x^2)dxdy$, $D:\ y=x^3,\ y=3x$

в) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathbf{cos}\sqrt{x^2+y^2}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ y=x^2,\ y=(3x^2/4)+1$;

б) $D:\ x^2-4x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ 2x+3y=6,\ z=3+x^2+y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz,\quad V: x^2=2(y^2+z^2),\ x=4,\ x\ge 0.$$

15. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x=16\sqrt{2y},\ x=\sqrt{2y},$ $z+y=2,\ z=0.$

б) $x^2-4x+y^2=0,$ $x^2-6x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{OA}} 2xy\,dx-x^2dy$, де L_{OA} – відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0,\ 0)$ і $A(2,\ 1)$.

б) $\int\limits_L z^2/(x^2+y^2)\,dl$, де L – виток гвинтової лінії $x=9\cos t$, $y=9\sin t$, $z=9t$, $t\in[0,\ \pi/2]$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (2x+3y+z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини (p): $2x+2y+z=2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S (1+2x^2)\,dydz+y^2dxdz+zdxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$ (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відрізана площинами $z=0,\ z=4$.

18. Дана функція $u(M)=x^3+xy^2-6xyz$ і точки $M_1(1,\ 3,\ -5)$, $M_2(4,\ 2,\ -2)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a=(y+z)i+(x-2y+z)j+xk,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2=1,\ z=0,\\ z=x^2+y^2.\end{cases}$

б) $a=2xyi+2xyj+z^2k,$ $S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\sqrt{2},\\ z=0,\ (z\ge 0).\end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M)=xi+(x+z)j+(y+z)k,$ Γ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $3x+3y+z=3$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру Γ $a(M)=3zi-2yj+2yk,\ \ \Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=4,\\ 2x-3y-2z=1.\end{cases}$

Варіант 29

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^{2n}}$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln n(n^2+3)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{nx^n}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin\sqrt{x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{0,5} x\mathbf{e}^{-x^2}\,dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = x^2+\mathbf{e}^y,\ \ y(0)=0$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=6-3x,\ \ x\in[-2,2]$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-5)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по *x* та *y*, якщо область *D* задана вказаними лініями $D:\ x\ge 0,\ y=1,\ y=-1,\ y=\log_{1/2}x$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}fdx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}}fdx$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області *D*:

а) $\iint\limits_{D}(54x^2y^2+150x^4y^4)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

б) $\iint\limits_{D}y^2(1+2x)\,dxdy$, $D:\ x=2-y^2,\ x=0$

в) $\int\limits_{0}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sin(x^2+y^2)\,dy$

12. Знайти площу плоскої області *D*, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ x=y^2,\ y^2=4-x$;

б) $D:\ y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ x=0$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 4,\ z = 16 - x^2 - y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V 1\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ \ V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ y \leq x,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x^2 + y^2 = 50,\ x = \sqrt{5y},$ $x = 0,\ z = 0,\ z = 6y/11.$

б) $z = y^2,\ x + y = 1,$ $x \geq 0,\ z \geq 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\oint\limits_L xdy - ydx$, де L – контур трикутника з вершинами $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ і $C(0, 1)$ при додатному положенні обхода.

б) $\oint\limits_L (x^2 + y^2)^2\,dl$, де L – коло $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S (6x - y + 5z)\,dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p): 3x + 2y + z = 6$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdz + ydxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 4 - z,\ (z \geq 0)$ (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом k), яка відрізана площиною $z = 0$.

18. Дана функція $u(M) = (x/y) - (y/z) - (x/z)$ і точки $M_1(2, 2, 2)$, $M_2(-3, 4, 1)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (3x - y - z)i + 3yj + 2zk,$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y. \end{cases}$$

б) $a = y^2xi + x^2yj + (z^3/3)k,$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0,\ (z \geq 0). \end{cases}$$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля *a(M)* вздовж контуру *Г* двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = (3x - 1)i + (y - x + z)j + 4zk$, *Г* – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $2x - y - 2z = -2$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора *n* цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля *a* вздовж контуру *Г*

$$a(M) = (x + y)i - xj + 6k,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Варіант 30

1. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{arcsin}\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$ **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\,\mathbf{ln}^3(n+5)}$ **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+6)}$

2. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\mathbf{ln}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n}{5n+1}\right)^n$

3. Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{cos}\,nx}{n^2}$ **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\mathbf{sin}(6x-3)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

5. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ з точністю до 0,001.

6. Знайти розклад в степеневий ряд по степеням x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля, членів цього розкладу) $y' = x^2 + y,\ \ y(0)=1.$

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2l$) функцію

а) $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ **б)** $f(x)=7-2x,\ \ x\in[-2,2].$

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=(x-5)^2$, задану в інтервалі (0; π), довизначивши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

9. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x та y, якщо область D задана вказаними лініями $D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ y=1,\ x=\sqrt{4-y^2}$.

10. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f dy$.

11. Обчислити подвійні інтеграли по області D:

а) $\iint\limits_D (xy-9x^5y^5)\,dxdy$, $D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

б) $\iint\limits_D \mathbf{e}^y\,dxdy$, $D:\ y=\mathbf{ln}x,\ y=0,\ x=2$

в) $\int\limits_0^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\mathbf{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

12. Знайти площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями:

а) $D:\ xy=1,\ x^2=y,\ y=2,\ x=0;$

б) $D:\ x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

13. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 5x + y = 5,\ z = x^2 + y^2$. Побудувати область інтегрування.

14. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz,\quad V: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x \ge 0.$$

15. Обчислити об’єм тіла, обмеженого заданими поверхнями:

а) $x = 15\sqrt{y},\ x = 15y,$ $z = 0,\ z = 15\left(15 + \sqrt{y}\right);$

б) $y^2 = x,\ x = 3,$ $z = x,\ z \ge 0.$

16. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ABC} – ломана ABC $A(2, 0)$, $B(5, 0)$ і $C(5, 3)$.

б) $\int\limits_L y\,dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 12x$, яка відрізана параболою $x^2 = 12y$.

17. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\iint\limits_S \left(x + 3y + 2z\right)dS$ по поверхні S, де S – частина площини $(p):\ 2x + y + 2z = 2$, обмежена координатними площинами;

б) $\iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right)dydz - y^2dxdz + 2yz^2dxdy$ по поверхні S, де S – частина поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальний вектор n якої утворює тупий кут з ортом j), яка відрізана площинами $y = 0$ і $y = 1,\ 0 \le y \le 1$.

18. Дана функція $u(M) = \mathbf{e}^{x-yz}$ і точки $M_1(1, 0, 3)$, $M_2(2, -4, 5)$. Визначити: **а)** похідну функції $u(M)$ в точці M_1 по напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; **б)** $\mathbf{grad}\,u(M_1)$.

19. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

а) $a = (x + y)i + (y + z)j + (z + x)k,$ $S: \begin{cases} y = 2x,\ y = 4x,\ x = 1, \\ z = y^2,\ z = 0. \end{cases}$

б) $a = -xi + 2yj + yzk,$ $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 4. \end{cases}$

20. З'ясувати, чи є векторне поле $a(M)$ соленоїдальним, потенціальним? Обчислити циркуляцію векторного поля $a(M)$ вздовж контуру $Г$ двома способами: використовуючи визначення циркуляції та за допомогою формули Стокса.

а) $a(M) = 3xi + (y + z)j + (x - z)k,$ $Г$ – трикутник, отриманий в результаті перетину площини $x + 3y + z = 3$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора n цієї площини;

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля a вздовж контуру $Г$ $a(M) = 4i + 3xj + 3xzk,\quad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$

Розв'язання типових задач

1. Дослідити на збіжність ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{\sqrt{n}\,(2n)!}$. За ознакою Д'аламбера розглянемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!\sqrt{n}\cdot(2n)!}{\sqrt{n+1}\cdot(2n+2)!\,3^n}=3\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=\left[\frac{3}{\infty}\right]=$$

$$=0<1,\ \text{ряд збіжний}$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln 3n}$.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln 3n}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\cdot\ln(3n)}\ (2)$$

Дослідимо ряд (2) за інтегральною ознакою:

$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{3x\cdot\ln(3x)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\int\limits_1^{b}\frac{d\ln(3x)}{\ln 3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\ln 3x\Big|_1^b=\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln\ln 3b-\ln\ln 3)=\infty,$ тобто інтеграл розбіжний, за інтегральною ознакою ряд (2) розбіжний, а за ознакою порівняння початковий ряд також розбіжний.

2. Знайти область збіжності ряду: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$. За ознакою Д'аламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}2^n(n-2)}{2^{n+1}(n-1)(x+2)^n}\right|=\frac{|x+2|}{2}$. Ряд збігається, коли $\frac{|x+2|}{2}<1$. $-2<x+2<2$, $-4<x<0$.

В точці $x=0$: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(n-2)}\approx\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд.

В точці $x=4$: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ – цей ряд умовно збіжний за ознакою Лейбниця.

Отже, область збіжності це $[-4;0)$.

3. Обчислити $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 0,001.

Замінимо в підінтегральному виразі $\ln(1+x)$ його розкладом в степеневий ряд, тобто $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$

Маємо:

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^{0,1}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots}{x}dx=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=0,1-\frac{1}{4}0,01+\frac{1}{9}0,0001-\ldots\approx 0,098$$

Останнє випливає з того, що в знакопочережному ряду типа Лейбниця залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів ряду. Оскільки $|r_2| < \frac{1}{9} \cdot 0{,}001 < 0{,}001$, то досить взяти два члени розкладу, тобто 0,1 – 0,0025 = 0,0975 ≈ 0,098.

4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x + \pi$, яка задана на проміжку $[-\pi;\ \pi]$.

Зобразимо графік суми (*рисунок 1*) ряду Фур'є $y = S(x)$ для функції $y = f(x)$.

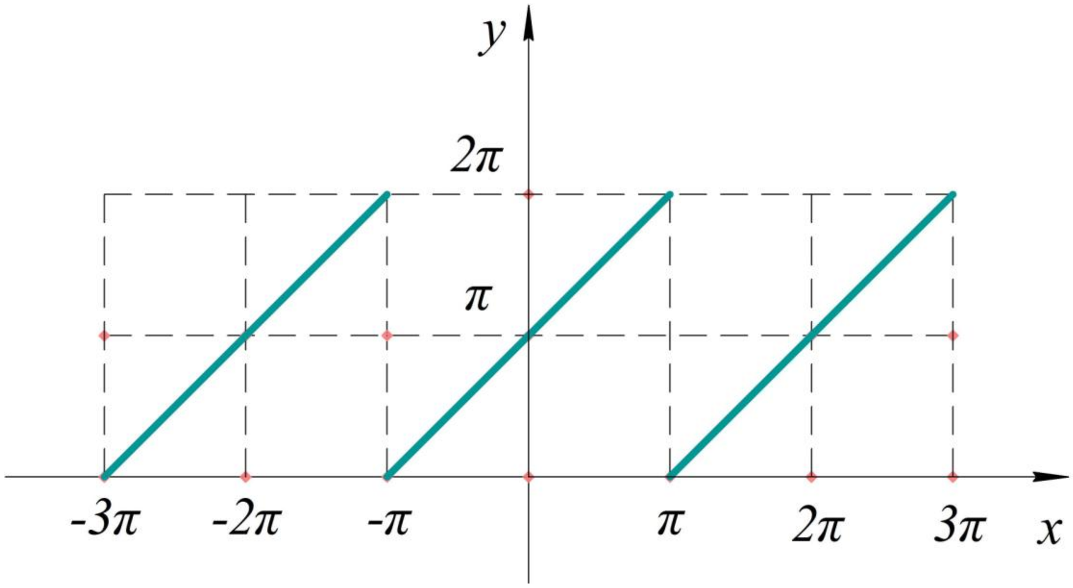

Рисунок 1 – Графік суми ряду Фур'є.

$y = S(x)$ – періодична функція з періодом $T = 2\pi$, півперіод $l = \pi$.

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = 2\pi$$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathbf{cos}\frac{\pi k x dx}{l} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\,\mathbf{cos}\,kxdx = \left|\begin{matrix} u = \pi + x \\ dv = \mathbf{cos}\,kxdx \\ du = dx \\ v = \dfrac{\mathbf{sin}\,kx}{k} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(\pi + x)}{k}\mathbf{sin}\,kx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{sin}\,kxdx\right) = 0$$

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\pi + x)\,\mathbf{sin}kx\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \pi + x \\ v = -\dfrac{\mathbf{cos}kx}{k} \\ du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x+\pi}{k}\mathbf{cos}kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{cos}kx\,dx \right) = -\frac{2}{k}\mathbf{cos}k\pi = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

Розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\mathbf{sin}kx = \pi + 2\left(\mathbf{sin}x - \frac{\mathbf{sin}2x}{2} + \frac{\mathbf{sin}3x}{3} - \ldots \right).$$

5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{Д}\sqrt{x}\,y\,dxdy$, якщо область $Д$ обмежена кривими $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$.

Зобразимо область інтегрування (*рисунок 2*)

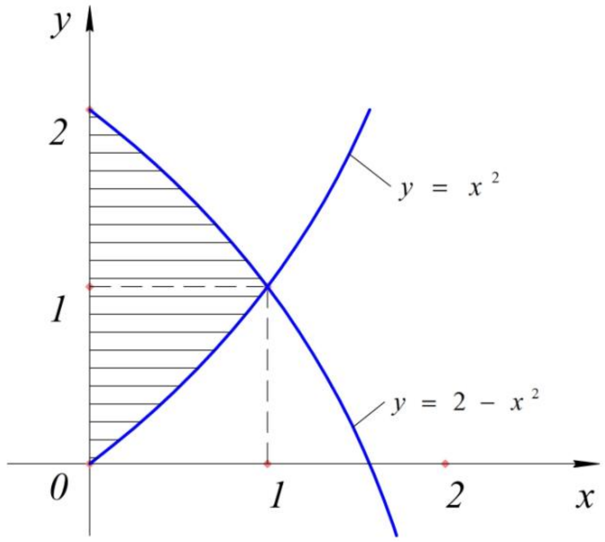

Рисунок 2 – Область Д.

$$\iint\limits_{Д}\sqrt{x}\,y\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2}\sqrt{x}\,y\,dy = \int_0^1\sqrt{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x^2} = \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{2}\left((2-x^2)^2 - x^4\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(2\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1\left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}}\right)dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{21}$$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

Об'єм тіла, яке займає область T (*рисунок 3*) визначається за формулою: $V = \iiint\limits_{T} dxdydz$.

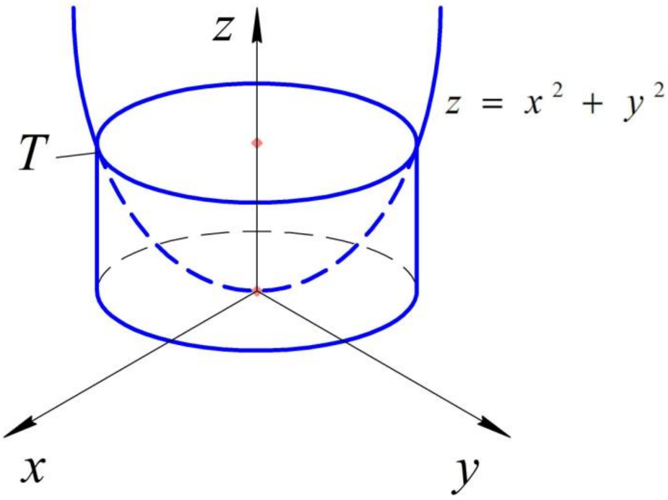

Рисунок 3 – Область T

Перейдемо до циліндричних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$, $0\le z\le\rho^2$.

Маємо:

$$\iiint_T dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho^2}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\rho\cdot z\Big|_0^{\rho^2}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1\right)d\varphi=\frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}\ (\text{куб. од.})$$

7. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_l (x-y)ds$, де l – відрізок прямої від точки $O(0, 0)$ до точки $A(4, 3)$.

Рівняння прямої OA має вид $y=\frac{3x}{4}$.

Знаходимо $y'=\frac{3}{4}$ і $ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=\frac{5}{4}dx$.

Отже $\int_l (x-y)ds=\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\frac{5}{4}dx=\frac{5}{16}\int_0^4 xdx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}$.

8. Знайти циркуляцію вектора поля $\bar{a}=(x+3y+2z)\bar{i}+(2x+z)\bar{j}+$ $+(x-y)\bar{k}$ по контуру трикутника ABC, де $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Згідно форми Стокса $Ц=\oint_l (x+3y+2z)dx+(2x+z)dy+(x-y)dz=$

$=\iint_S \bar{n}\cdot rot\,\bar{a}dS$, де $rot\,a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+2z & 2x+z & x-y\end{vmatrix}=-2i+j-k$; l – контур ΔABC при додатній орієнтації, який лежить в площині $3x+2y+6z=6$. Вектор нормалі має вигляд $n=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$, тобто

$$Ц=\iint_{D_{xy}}\left(-1+\frac{1}{3}-1\right)dxdy=-\frac{5}{3}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3x}{2}}dy=-5\int_0^2\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=-5\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=-5(2-1)=-5.$$

9. Обчислити потік векторного поля $\bar{a} = (z - x)\bar{i} + (x + 2z)\bar{j} + 3z\bar{k}$ через зовнішню сторону піраміди з вершинами в точках $O(0,\,0,\,0)$, $A(4,\,0,\,0)$, $B(0,\,1,\,0)$, $C(0,\,0,\,4)$.

Застосуємо формулу Остроградського-Гауса:

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,.$$

Маємо:

$$П = \iint\limits_S (z - x)dydz + (x + 2z)dzdx + 3zdxdy = \iiint\limits_T 2dxdydz = 2\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{4}} dy \int\limits_0^{4-4y-x} dz = \frac{16}{3}\,.$$

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 368 с. — ISBN 966-06-0230-8.

2. Грималюк В. П. Вища математика: У 2 ч.: Навч. посіб. / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 1. – 376 с.2

3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. — К: А. С. К., 2006. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

4. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн./ Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.

5. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. — К.: Техніка, 2000. — 792 с. — ISBN 966-575-153-0.

6. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

7. Шипачев В. С. Курс высшей математики / В. С. Шипачев. — М. Оникс, 2009. — 608 с. — ISBN 978-5-488-02067-2.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. http://www.nbuv.gov.ua/ – сайт «Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського».

3. http://kpi.ua/ – сайт «Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».

2. – сайт Національний університет «Чернігівська політехніка»