

## РОЗДІЛ V. БУДІВНИЦТВО ТА ГЕОДЕЗІЯ

DOI: 10.25140/2411-5363-2022-1(27)-184-198

УДК 691.327:539.383

**Юрій Крусь**

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, доцент  
доцент кафедри автомобільних доріг, основ і фундаментів  
Національний університет водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)  
E-mail: [alkrous@ukr.net](mailto:alkrous@ukr.net). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5271-7765>

### ЗВ'ЯЗОК МІЖ НАПРУЖЕННЯМИ І ДЕФОРМАЦІЯМИ БЕТОНУ ЗА РІЗНИХ СИЛОВИХ РЕЖИМІВ КОРОТКОЧАСНОГО ОСЬОВОГО СТИСКУ

Запропонована зручна для користування та математичного опрацювання апроксимативна функція діаграми деформування, що відображає зв'язок між напруженнями й деформаціями бетону за «жорсткого» силового режиму однорідного стиску. Її одночасне застосування з отриманою раніше діаграмою для м'якорезимного навантажування надає можливість отримати стабільну й вільну від зайвих чинників впливу діаграму стану бетону, придатну для базованих на деформаційній моделі перерізів розрахунків зігнутих залізобетонних елементів (конструкцій) за всіма групами граничних станів та оцінки неоднорідного напружено-деформованого стану перерізів елементів (конструкцій) на будь-якій стадії навантажування аж до руйнування.

**Ключові слова:** бетон; діаграми деформування і стану; «м'який» і «жорсткий» режими навантажування; деформаційна модель перерізів.

Рис.: 1. Табл.: 1. Бібл.: 60.

**Актуальність теми дослідження.** В останні роки при проектуванні зігнутих залізобетонних конструкцій (згинальних, позacentрово стиснутих і розтягнутих і т. ін.) застосовують аналітичні методи розрахунку із залученням деформаційних моделей перерізів. Такий підхід дозволяє більш повно враховувати особливості роботи конструкційних матеріалів (бетону й арматури) і оцінювати неоднорідний напружено-деформований стан (НДС) перерізів елементів (конструкцій) на будь-якій стадії навантажування (дограничній, граничній і позаграничній) аж до руйнування, а також із єдиних позицій розраховувати конструкції за всіма групами граничних станів – за несучою здатністю (міцністю, стійкістю, витривалістю) та за придатністю до нормальної експлуатації (деформаціями (прогинами, переміщеннями, кутами повороту та ін.), утворенням і розкриттям тріщин та ін.).

Основним інструментом деформаційної розрахункової моделі є фактична діаграма стану бетону, що встановлює зв'язок між його напруженнями  $\sigma_b$  і відносними деформаціями  $\varepsilon_b$  у стиснутій і розтягнутій зонах перерізу. Найчастіше таку діаграму отримують, вдаючись до непрямих методів, випробовуючи в стандартному силовому режимі еталонні бетонні призми позacentровим стиском [1; 2] або армовані призмове зразки центральним стиском [3; 4; 5], досліджуючи зразки-циліндри з бетону в спеціальній тензометричній трубці [6], піддаючи залізобетонні балки з пружними вставками «чистому» згину [7; 8; 9] та ін. Очевидно, що в усіх цих дослідженнях важко домогтись єдиності діаграми стану бетону, оскільки на її окреслення, а отже, на параметри нелінійності деформування матеріалу істотно впливає ціла низка чинників: форма й розміри експериментальних зразків, ступінь їхнього армування, наявність або відсутність і рівень попереднього напруження арматури, ексцентриситет прикладання зовнішнього навантаження та ін.

Саме тому питання графоаналітичної побудови й математичного описання базованої на зрозумілих і точних фізичних уявленнях функціональної залежності діаграми стану бетону розглядаємо як важливу й актуальну проблему.

**Постановка проблеми.** Відсутність єдиної методики отримання діаграми стану бетону ставить під сумнів достовірність результатів виконаних розрахунків, не дозволяє порівнювати, пояснювати та пов'язувати в єдине ціле накопичені поколіннями до-

слідників численні і здебільшого унікальні експериментальні й теоретичні дані, утруднює осмислення та якісне провіщання специфічних явищ механіки деформівних бетону й залізобетону, не дає можливості оцінювати наявні теорії та орієнтуватись при обранні напрямів формування більш прогресивних поглядів, гальмує відкриття нових можливостей у практиці інженерних розрахунків.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Далі розглядаємо роботу лише стиснутого бетону, керуючись поширеною практикою та вважаючи, що для розтягу можуть бути застосовані аналогії. Крім того, розрізняємо діаграму деформування бетону, отриману в результаті стандартних лабораторних випробувань еталонних бетонних зразків осьовим стиском, і діаграму стану бетону, що характеризує його роботу в неоднорідно деформівних поперечних перерізах зігнутих елементів і конструкцій.

Отже, як відомо з теорії пластичності [10], розвиток деформацій зі зростанням навантаження й окреслення діаграми  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ , установлюваної після проведення випробувань руйнуванням еталонних призмових зразків із бетону в умовах ступінчастого короткочасного осьового стиску, істотно залежать від того, чи зберігається постійною впродовж досліджень швидкість деформування  $V_\varepsilon = d\varepsilon/dt = const$  або ж швидкість подачі напружень  $V_\sigma = d\sigma/dt = const$ . У першому випадку за так званого «жорсткого» навантажування після досягнення максимального значення напружень  $\bar{R}_b$ , якому відповідає деформація  $\bar{\varepsilon}_{bR}$  (див. пунктирну лінію на рис. 1), на кривій  $\bar{\sigma}_b \sim \bar{\varepsilon}_b$  (тут свідомо деформації позначаємо без верхньої риски, маючи на увазі, що тим же самим деформаціям  $\varepsilon_b$  за різних режимів навантажування відповідають відмінні одне від одного значення напружень  $\sigma_b$  і  $\bar{\sigma}_b$ ) виявляється низхідна ділянка, і подальше зростання деформацій супроводжується падінням величини напружень до критичної міцності  $\bar{R}_{bu} < \bar{R}_b$ , якій відповідає гранична (або інакше – критична) деформація  $\bar{\varepsilon}_{bu} > \bar{\varepsilon}_{bR}$ , яка фіксує кінцеву точку усталеного деформування матеріалу. У другому випадку, визначуваному як «м'яке» навантажування, досягнення максимуму напружень  $R_b$ , якому відповідає деформація  $\varepsilon_{bR}$  (див. суцільну лінію на рис. 1), призводить до швидкого вичерпання несучої здатності бетону, так що низхідну ділянку кривої  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$  зафіксувати не вдається.

«М'який» режим навантажування може бути реалізований при проведенні випробувань руйнуванням еталонних призмових зразків із бетону згідно з чинними стандартами [11; 12] на традиційних гідравлічних пресах. При цьому отримують досить стабільну одніткову лише з висхідною ділянкою діаграму стиску  $\sigma_b = f(\varepsilon_b)$ .

«Жорсткий» режим навантажування через відсутність єдиної методики створюють за допомогою відмінних від стандартних спеціально виготовлених дорогих випробувальних пресів, що дозволяють зберігати постійною швидкість приросту відносних деформацій [13; 14; 15], або допоміжних пристосувань, здатних сприймати зусилля і розвантажити бетон після досягнення максимуму стискаючих напружень, тобто після переходу через вершину кривої стиску [15; 16; 17; 18; 19; 20]. Однак надійність отриманих при цьому діаграм деформування бетону залишає привід для сумнівів. Про це свідчать і самі прихильники прямого експериментального шляху встановлення кривої стиску, наводячи результати вивчення чутливості її окреслення до зміни жорсткості елементів самої випробувальної установки та швидкості деформування [1; 7; 14; 17; 21], а також указуючи на істотний вплив на якість експериментальних даних такого суб'єктивного чинника, як практичних навичок проведення відповідних досліджень, і насамперед – реакції експериментатора,

особливо при фіксації показників вимірювальної апаратури на низхідній вітці роботи бетону в умовах його інтенсивно зростаючих деформацій при близьких до руйнуючих навантаженнях [3; 20; 22; 23]. Як наслідок, результати різних дослідів не завжди придатні для порівняння між собою, а часто, за твердженням авторів [4; 14; 24], – дуже суперечливі.

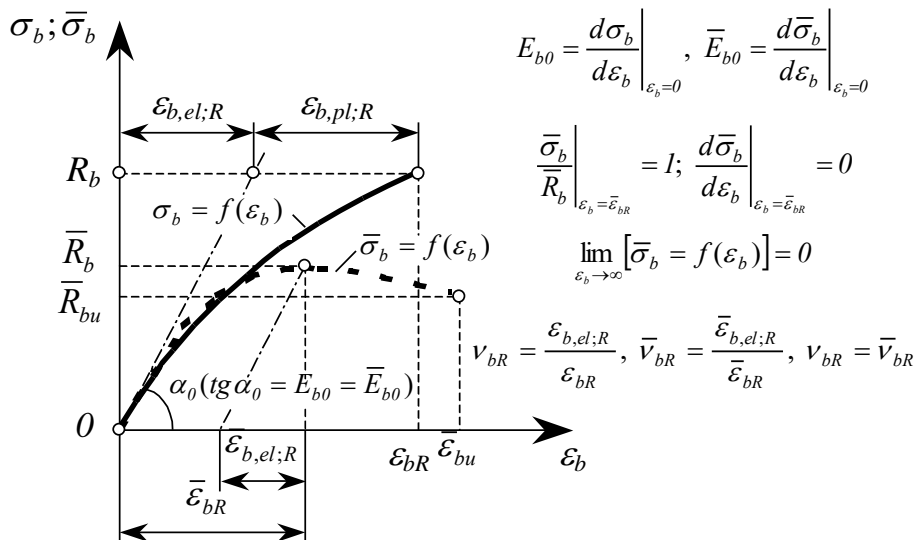


Рис. 1. Діаграми деформування бетону за різних силових режимів короткочасного осьового тиску до руйнування та їхні основні параметри:

— «м'який» режим; - - - «жорсткий» режим

Описані режими навантажування дозволяють одержати діаграми тиску бетону  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$  і  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$  в умовах однорідного НДС із властивим йому рівномірним розподілом деформацій і напружень у перпендикулярних до напрямку дії навантаження перерізах центрально навантажених елементів. У той же самий час у реальних умовах експлуатації найбільш поширеним є неоднорідний НДС, що має місце, зокрема у стиснутій зоні зігнутих і позацентрово навантажених елементів (конструкцій). Характеризуючись нерівномірним у геометричному відношенні й у часі розподілом деформацій і напружень у перпендикулярних до подовжньої осі перерізах зігнутих елементів, такий стан визначає опір більшості будівельних конструкцій деформуванню й руйнуванню.

У низці наукових публікацій [7; 25; 26] висловлюється думка, що саме одночасним застосуванням діаграм деформування  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$  і  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , одержаних випробуваннями бетону в умовах однорідного тиску, можна вирішити давню наукову проблему відшукування надійної й переконливої діаграми стану бетону  $\sigma_{b,fl} = f(\varepsilon_b)$ , що а) відображає функціональний зв'язок між напруженнями й деформаціями бетону неоднорідно стиснутої зони у зігнутих бетонних і залізобетонних елементах (конструкціях); б) придатна у випадку справедливості гіпотези плоских перерізів і суміщення нульових деформацій і нульових напружень на єдиній нейтральній осі (більш відомої як «гіпотеза Бернуллі»); в) є основним інструментом деформаційної розрахункової моделі перерізів.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Проведений аналіз останніх досліджень і публікацій засвідчує, що недостатньо дослідженими у загальній проблемі є питання теоретичного обґрунтування, розробки та апробування діаграми жорсткорезимного деформування бетону, комплексне застосування якої одночасно з діаграмою деформування в умовах «м'якого» силового режиму уможливить отримати надійну й переконливу діаграму стану бетону.

**Мета й завдання досліджень.** Основною метою досліджень є графоаналітична побудова та математичне описання базованої на зрозумілих і точних фізичних уявленнях залежності  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , експериментальне отримання якої, як зазначалось вище, викликає серйозні технічні труднощі й значні економічні витрати, а точність здійснених вимірювань і достовірність одержаних результатів – великі сумніви. Зазначена залежність характеризує деформування й руйнування бетону за «жорсткого» силового режиму осьового стиску, а її одночасне застосування з раніше отриманою залежністю  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$  для м'якорезимного навантажування надасть можливість побудувати діаграму стану бетону  $\sigma_{b,fl} = f(\varepsilon_b)$ .

Для реалізації поставленої мети вирішувались такі завдання:

1) розробити базовані на сучасних уявленнях про природу міцності й деформування та впливаючих із сутності фізичних і механічних процесів у бетоні критерії, яким має відповідати залежність  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ ;

2) запропонувати зручну для користування та математичного опрацювання (інтегрування, диференціювання, розкладання в ряди і т. ін.) структуру функціональної залежності у вигляді  $\bar{\sigma}_b = f(\varepsilon_b)$ ;

3) скласти граничні умови та визначити постійні коефіцієнти функціональної залежності  $\bar{\sigma}_b = f(\varepsilon_b)$ , які б мали строгий фізичний зміст та одночасно були б параметрами діаграми деформування;

4) виконати порівняльний аналіз результатів розрахунку із застосуванням запропонованої залежності  $\bar{\sigma}_b = f(\varepsilon_b)$  з відповідними експериментальними даними, тобто визначити апроксимативні властивості зазначеної залежності.

**Виклад основного матеріалу.** Раніше була одержана нескладна і водночас зручна для практичного застосування з задовільними апроксимативними властивостями залежність  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$ , що характеризує деформування бетону за «м'якого» режиму короткочасного осьового стиску аж до руйнування (див. суцільну лінію на рис. 1), у формі дробово-лінійної функції вигляду [27; 28]

$$\sigma_b = \frac{R_b(\varepsilon_b/\varepsilon_{bR})}{(1-\nu_{bR})(\varepsilon_b/\varepsilon_{bR}) + \nu_{bR}} = \frac{R_b\eta_\varepsilon}{(1-\nu_{bR})\eta_\varepsilon + \nu_{bR}}, \quad (1)$$

де  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_b/\varepsilon_{bR}$  – рівень відносних деформацій у бетоні; решта позначень проілюстровані на рис. 1.

При математичному моделюванні залежності  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , що описує роботу бетону за «жорсткого» режиму короткочасного осьового стиску до руйнування, керувались її відповідністю таким базованим на сучасних уявленнях про природу міцності й деформування та впливаючим із сутності фізичних і механічних процесів у бетоні [13; 14; 26; 29; 30; 31] критеріям (див. пунктирну лінію на рис. 1):

– окреслення розрахункової діаграми деформування, побудованої з використанням прийнятої апроксимуючої функції, подібне до форми фактичної кривої стиску, одержаної дослідним шляхом;

– застосована функція визначена й неперервна на всьому діапазоні деформування, ліва границя якого знаходиться в початку координат;

– вона невід'ємна на цьому замкненому проміжку та звертається в нуль лише у вихідній точці, тобто має в початку координат строгий мінімум;

– прийнята функція, не маючи вертикальних асимптот на всьому інтервалі роботи матеріалу, монотонно зростає й так само монотонно спадає відповідно на висхідній і низхідній ділянках зазначеної області;

- її перша похідна звертається в нуль у точці якісної зміни напрямку кривої стиску, тобто апроксимуюча функція має строгий максимум;
- при зростанні відносної деформації напруження асимптотично наближаються до нуля в правій частині зони деформування;
- аналітична залежність вирізняється порівняльною простотою запису, що дозволяє без особливих труднощів знаходити її обернену функцію, а також однаково легко виражати параметри нелінійності роботи бетону як через напруження, так і через відносні деформації на будь-якій стадії навантажування;
- вона зручна для математичних операцій (інтегрування, диференціювання, розкладання в ряди і т. ін.);
- апроксимуюча функція містить строгі параметри фізичної нелінійності та передбачає можливість простого трансформування діаграми деформування бетону при врахуванні різних додаткових чинників (характеру, швидкості та тривалості дії навантаження та ін.).

Усім вище переліченим вимогам до аналітичної залежності між напруженнями й відносними деформаціями бетону за «жорсткого» режиму короткочасного осьового стиску до руйнування в математичній формі  $\bar{\sigma}_b = f(\varepsilon_b)$  найбільшою мірою відповідає дробова функція вигляду [32]

$$\bar{\sigma}_b = \frac{A\varepsilon_b}{1 + B\varepsilon_b^C}, \quad (2)$$

де  $A, B, C$  – постійні коефіцієнти, що характеризують матеріал та визначаються з виконання таких граничних умов:

1) за певної відносної деформації  $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bR}$  напруження в бетоні досягає максимального значення  $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b$ ;

2) перша похідна  $d\bar{\sigma}_b/d\varepsilon_b$ , що у графічній інтерпретації являє собою тангенс кута нахилу дотичної до кривої  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , при  $\varepsilon_b=0$  дорівнює початковому модулю пружності бетону  $E_{b0}$ ;

3) перша похідна  $d\bar{\sigma}_b/d\varepsilon_b$  при  $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bR}$  звертається в нуль.

У загальному випадку при апроксимуванні діаграми деформування бетону будь-якою іншою функцією з більшою кількістю постійних коефіцієнтів, наприклад – чотирьох, ще одним вузлом інтерполяції може бути прийнята точка з координатами ( $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bu}; \bar{\sigma}_b = \bar{R}_{bu}$ ), де має виконуватись додаткова четверта гранична умова  $d^2\bar{\sigma}_b/d\varepsilon_b^2|_{\varepsilon_b=\bar{\varepsilon}_{bu}} = 0$ , що свідчить про перегин кривої  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$  у зафіксованій точці.

Розкриття 1-ої граничної умови дає такий результат:

$$\bar{R}_b = \frac{A\bar{\varepsilon}_{bR}}{1 + B\bar{\varepsilon}_{bR}^C} \Rightarrow A\bar{\varepsilon}_{bR} = \bar{R}_b(1 + B\bar{\varepsilon}_{bR}^C) \Rightarrow A = \frac{\bar{R}_b(1 + B\bar{\varepsilon}_{bR}^C)}{\bar{\varepsilon}_{bR}}. \quad (3)$$

Продиференціювавши формулу (2) по  $\varepsilon_b$ , будемо мати

$$\frac{d\bar{\sigma}_b}{d\varepsilon_b} = \frac{A}{1 + B\varepsilon_b^C} - \frac{AB\varepsilon_b^C C}{(1 + B\varepsilon_b^C)^2} = \frac{A(1 + B\varepsilon_b^C - B\varepsilon_b^C C)}{(1 + B\varepsilon_b^C)^2}. \quad (4)$$

З урахуванням (4) реалізація 2-ої та 3-ої граничних умов призводить до виразів відповідно

$$E_{b0} = \left. \frac{d\bar{\sigma}_b}{d\varepsilon_b} \right|_{\varepsilon_b=0} = A; \tag{5}$$

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}_b}{d\varepsilon_b} \right|_{\varepsilon_b=\bar{\varepsilon}_{bR}} = \frac{A(1 + B\varepsilon_{bR}^C - B\varepsilon_{bR}^C C)}{(1 + B\varepsilon_{bR}^C)^2} = 0 \Rightarrow B\varepsilon_{bR}^C = \frac{1}{C-1}. \tag{6}$$

У результаті сумісного розв’язання рівнянь (3), (5) і (6) відносно постійних коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  і  $C$  одержимо формули для визначення цих параметрів, а саме:

$$A = E_{b0}; \quad B = \frac{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b}{\bar{R}_b \bar{\varepsilon}_{bR}^{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR}/(E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b)}}; \quad C = \frac{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR}}{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b}. \tag{7}$$

Беручи до уваги вирази (7), математична залежність (2), що описує діаграму деформування бетону в «жорсткому» режимі короткочасного осьового стиску до руйнування для усього робочого діапазону від початку прикладання навантаження до максимального напруження  $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b$  при відносній деформації  $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bR}$  і подальшому поступовому зменшенні напруження до критичної міцності  $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_{bu}$ , який відповідає гранична відносна деформація  $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bu}$ , запишеться так:

$$\bar{\sigma}_b = \frac{E_{b0}\varepsilon_b}{1 + \frac{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b}{\bar{R}_b \bar{\varepsilon}_{bR}^{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR}/(E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b)}} \varepsilon_b^{E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR}/(E_{b0}\bar{\varepsilon}_{bR} - \bar{R}_b)}}. \tag{8}$$

Якщо скористатись відомим співвідношенням проф. В. І. Мурашева  $R_b = E'_{bR}\varepsilon_{bR} = \nu_{bR}E_{b0}\varepsilon_{bR}$  [33] і позначити  $\bar{\eta}_\varepsilon = \varepsilon_b/\bar{\varepsilon}_{bR}$ , то математична модель деформування бетону (8) набуває більш зручної для практичного застосування форми, а саме:

$$\bar{\sigma}_b = \frac{R_b(\varepsilon_b/\bar{\varepsilon}_{bR})}{\nu_{bR} + (1 - \nu_{bR})(\varepsilon_b/\bar{\varepsilon}_{bR})^{1/(1-\nu_{bR})}} = \frac{R_b\bar{\eta}_\varepsilon}{\nu_{bR} + (1 - \nu_{bR})\bar{\eta}_\varepsilon^{1/(1-\nu_{bR})}}. \tag{9}$$

Стосовно отриманої залежності (9) відзначимо таке:

– вона задовольняє всім граничним умовам, засвідчуючи про відповідність усталеним і вищесформульованим уявленням про міцність і деформування бетону, тобто при  $\varepsilon_b=0$ ,  $\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_{bu}$  і  $\varepsilon_b \rightarrow \infty$  маємо відповідно  $\bar{\sigma}_b=0$ ,  $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b$  і  $\bar{\sigma}_b \rightarrow 0$ ;

– вона коректно ілюструє роботу бетону як нелінійно деформівного матеріалу, що може перебувати в стані від ідеально пластичного до ідеально пружного, тобто при  $\nu_{bR} \rightarrow 0$  і  $\nu_{bR} \rightarrow 1$  маємо відповідно  $\bar{\sigma}_b = \bar{R}_b$  і  $\bar{\sigma}_b = E_{b0}\varepsilon_b$ .

Як бачимо, формула (9), на відміну від багатьох інших подібних виразів (див. таблицю), відповідає сучасним уявленням про природу міцності й деформування бетону, не містить жодних емпіричних коефіцієнтів, які здебільшого не мають ніякого фізичного змісту та характеризують лише певний бетон у конкретних умовах його випробування. Присутність же строго зафіксованих міцнісних і деформативних характеристик, які одночасно є діаграмними параметрами та характеризують нелінійність деформування бетону, робить досить просто структурно оформлену залежність (9) гнучкою щодо дослідних точок і однаково придатною як для наукових досліджень, так і для інженерних розрахунків.

Апроксимативні властивості залежності (9) аналізували за даними випробувань циліндричних зразків (усього 27 штук) із важкого бетону (на звичайних заповнювачах) різної міцності ( $R_b=15,72\dots110,01$  МПа) і віку (31...56 діб) короткочасним осьовим стиском із постійною швидкістю приросту деформацій  $V_\varepsilon = d\varepsilon_b/dt=(1,5\pm0,7)\times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$  до руйнування

[34]. Статистичні характеристики варіаційних рядів нормального розподілу співвідношень  $\sigma_b^{exp} / \sigma_b^{th}$  визначені за [35] та свідчать про задовільну збіжність дослідних напружень  $\sigma_b^{exp}$  і відповідних їм розрахункових значень  $\sigma_b^{th}$ , обчислених за отриманою формулою (9) (коефіцієнт варіації змінюється у межах  $\pm(4,49...9,17)\%$ , а показник точності  $P = \pm(1,16...3,74)\% < 5\%$ ).

Таблиця

*Закономірності зв'язку між напруженнями  
й деформаціями центрально стисненого бетону*

№ з/п	Автори	Рік	Вигляд рівняння зв'язку $\sigma_b = f(\varepsilon_b)$
1	2	3	4
I. Квадратичні, кубічні, степеневі багаточленні й степенєво-квадратичні функції			
1	Gerstner F. J. [36]	1831	$\sigma_b = \alpha \varepsilon_b - \beta \varepsilon_b^2, \text{ де } \alpha = E_{b0};$ $\beta = (E_{b0} - E'_{bR}) / (2\varepsilon_{bR}) = [1 - E'_{bR} / E_{b0}] (E_{b0} / 2\varepsilon_{bR});$ $E_{b0} = \operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{\substack{\sigma_b \rightarrow 0 \\ \varepsilon_b \rightarrow 0}} (\sigma_b / \varepsilon_b) - \text{модуль пружності бетону};$ $E'_{bR} = R_b / \varepsilon_{bR} - \text{граничний січний модуль пружнопластичності бетону}$
	Залігер Р. [37]	1931	
	Столяров Я. В. [38]	1941	
2	Hognestad E. [39]	1951	$\sigma_b = R_b (2\eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^2) - \text{так звана парабола Ріттера}$
	Hognestad E., Hanson N. W., McHenry D. [40]	1955	
	Rüsch H. [41]	1960	
3	Лолейт А. Ф. [42]	1933	$\sigma_b = E_{b0} \varepsilon_b - A_3 \varepsilon_b^3$
4	Schüle F. [43]	1909	$\sigma_b = \alpha \varepsilon_b^m - \beta \varepsilon_b^2$
5	Sturman G., Shah S., Winter G. [44]	1965	$\sigma_b = A \varepsilon_b + B \varepsilon_b^n$
II. Поліноміальні функції			
6	Young L. E. [45]	1960	$\sigma_b = A \cdot \eta_\varepsilon - B \cdot \eta_\varepsilon^2 + C \cdot \eta_\varepsilon^3,$ $\text{де } A = E_{b0}; B = 2E_{b0} \varepsilon_{bR} - 3R_b; C = E_{b0} \varepsilon_{bR} - 2R_b$
7	Saenz L. P. [46]	1964	$\sigma_b = R_b \sum_{k=1}^4 A_k \eta_\varepsilon^k$
	Гуца Ю. П., Лемиш Ю. П. [30; 47]	1985	
8	Байков В. М., Горбатов С. В., Димитров З. А. [25]	1977	$\sigma_b = R_b \sum_{k=1}^5 A_k \eta_\varepsilon^k$
	Бамбура А. М., Бачинський В. Я. [48; 49]	1980	
		1987	
III. Тригонометричні функції			
9	Young L. E. [45]	1960	$\sigma_b = R_b \sin[(\pi/2) \cdot \eta_\varepsilon]$
	Everard N. J. [50]	1967	
10	Hsu C. T., Mirza M. S. [51]	1969	$\sigma_b = R_b \left[ \sin(\pi \eta_\varepsilon / 2) + 0,2 \eta_\varepsilon (e^{1-\eta_\varepsilon} - 1) \right]$
11	Остапенко А. Ф. [52]	1992	$\sigma_b = A \cdot \sin(F \cdot \varepsilon_b) + B \cdot \cos(F \cdot \varepsilon_b) + C \cdot \varepsilon_b + D$
IV. Дробові функції			
12	Desayi P., Krishnan S. [53]	1964	$\sigma_b = R_b \left[ A \eta_\varepsilon / (1 + B \eta_\varepsilon^2) \right]$
13	Saenz L. P. [54]	1964	$\sigma_b = R_b \frac{A \eta_\varepsilon}{1 + B \eta_\varepsilon + C \eta_\varepsilon^2}$
14	Sargin M., Handa V. K. [55]; Sargin M. [56]	1969 1971	$\sigma_b = R_b \frac{A \eta_\varepsilon + (D-1) \eta_\varepsilon^2}{1 + (A-2) \eta_\varepsilon + D \eta_\varepsilon^2}$

Закінчення табл.

1	2	3	4
15	Wang P.-T., Shah S. P., Naaman A. E. [57] Ahmad S. H., Shah S. P. [58]	1978 1978	$\sigma_b = R_b \frac{A\eta_\varepsilon + B\eta_\varepsilon^2}{1 + C\eta_\varepsilon + D\eta_\varepsilon^2}$
16	Popovics S. [59; 60]	1970, 1973	$\sigma_b = R_b \frac{n\eta_\varepsilon}{n-1+\eta_\varepsilon^n}$ , де $n_{concretes} = 0,4 \times 10^{-3} R_b + 1$ ; $n_{cement\ mortars} = 0,15 \times 10^{-3} R_b + 1,5$ ; $n_{cement\ pastes} = 12$ ; тут $R_b$ вимірюється у $psi = фунт/кв. дюйм$ ( $kPa = psi \times 6,89476$ )

*Примітка.* У вищенаведених формулах  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_b / \varepsilon_{bR}$  – відносний рівень деформацій;  $\alpha, \beta, m, n, A, A_3, A_k, B, C, D, F$  – сталі коефіцієнти матеріалу, які переважно визначаються дослідним шляхом і не мають значення фізичних констант; решта позначень – такі ж самі, що й на рис. 1.

**Висновки.** 1) Базуючись на сучасних уявленнях про природу міцності й деформування нелінійно деформованих матеріалів та з використанням параметрів, що мають точний і зрозумілий фізичний зміст, запропоновано позбавлене зайвого емпіризму, зручне для користування та математичного опрацювання рівняння зв'язку (тобто апроксимуюча функція діаграми деформування), що відображає залежність між напруженнями й деформаціями бетону за «жорсткого» силового режиму осьового стиску.

2) Порівняльний аналіз результатів розрахунку напружень із відповідними експериментальними даними свідчить про достатню обґрунтованість і коректність викладеного методичного підходу до графічної побудови та математичного апроксимування зазначеної діаграми деформування.

3) Перспективним вважаємо одночасне застосування запропонованої діаграми жорсткорезимного однорідного деформування разом із відомою діаграмою для умов «м'якого» силового режиму однорідного стиску для отримання стабільної й вільної від зайвих чинників впливу діаграми стану бетону як основного інструмента деформаційної моделі перерізів. Таким чином як в наукових дослідженнях, так і в інженерному проектуванні з'явиться можливість з єдиних позицій не лише розраховувати зігнуті залізобетонні елементи (конструкції) за усіма групами граничних станів, але й більш повно враховувати особливості роботи конструкційних матеріалів (зокрема бетону) і оцінювати неоднорідний напружено-деформований стан перерізів елементів (конструкцій) на будь-якій стадії навантажування аж до руйнування.

### Список використаних джерел

1. Веретенников В. И. О влиянии размеров и формы сечения элементов на диаграмму деформирования бетона при внецентренном сжатии / В. И. Веретенников, А. А. Бармотин // Бетон и железобетон. – 2000. – № 5. – С. 27–30.
2. Холмянский М. М. К механизму деформирования и разрушения бетона при сжатии и растяжении / М. М. Холмянский // Бетон и железобетон. – 1989. – № 9. – С. 25–26.
3. Гвоздев А. А. О полной диаграмме сжатия бетона, армированного поперечными сетками / А. А., Гвоздев А. В. Шубик, Н. Г. Матков // Бетон и железобетон. – 1988. – № 4. – С. 37–39.
4. Роговой С. И. Нелинейное деформирование в теории железобетона и расчёт прочности нормальных сечений : монография / С. И. Роговой. – Полтава, 2002. – 183 с.
5. Таль К. Э. О деформативности бетона при сжатии / К. Э. Таль // Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов : сб. трудов ЦНИПС. – М. : Госстройиздат, 1955. – С. 202–207.
6. Мурашкин Г. В. К определению диаграммы « $\sigma$ – $\varepsilon$ » бетона с ниспадающим участком. Железобетонные конструкции / Г. В. Мурашкин, С. А. Бутенко, И. Д. Яворский // Экспериментально-теоретические исследования. – 1984. – С. 20–25.
7. Бачинский В. Я. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии / В. Я. Бачинский, А. Н. Бамбура, С. С. Ватагин // Бетон и железобетон. – 1984. – № 10. – С. 18–19.



8. Гузеев Е. А. Исследование силовых и энергетических параметров разрушения бетона по полностью равновесным диаграммам его деформирования / Е. А. Гузеев, В. И. Шевченко, Л. А. Сейланов // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1986. – № 8. – С. 1–5.
9. Дегтерев В. В. Деформативность бетона сжатой зоны в зависимости от её формы и характера армирования / В. В. Дегтерев // Бетон и железобетон. – 1986. – № 8. – С. 42–43.
10. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности / Н. И. Безухов. – М. : Госиздат техн.-теоретич. лит.-ры, 1953. – 420 с.
11. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методы определения призмочной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона. – [Дата введения 1982-01-01]. – Изд. офиц. – М. : Изд-во стандартов, 1988. – 18 с.
12. ДСТУ Б В.2.7-217:2009. Бетони. Методи визначення призмочної міцності, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. – [Чинний з 2010-09-01]. – Вид. офиц. – К. : Мінрегіонбуд України, 2010. – 16 с.
13. Бамбура А. М. Експериментальні основи прикладної деформаційної теорії залізобетону : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / А. М. Бамбура. – Х., 2006. – 39 с.
14. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчёта и конструирования : учеб. пособие для студентов строительных специальностей / Н. П. Блещик, Д. Д. Жуков, Д. Н. Лазовский и др. ; под ред. Т. М. Пецольда и В. В. Тура. – Брест : БГТУ, 2003. – 380 с.
15. Рюш Г. Исследование работы изгибаемых элементов с учётом упругопластических деформаций бетона : материалы международного совещания по расчёту строительных конструкций (Москва, декабрь, 1958 г.) / Г. Рюш. – М. : Госстройиздат, 1961. – С. 183–199.
16. Бич П. М. Экспериментально-теоретические исследования закритических характеристик бетона / П. М. Бич // Бетон и железобетон. – 1987. – № 3. – С. 26–27.
17. Ивашенко Ю. А. Исследование процесса разрушения бетона при разных скоростях деформирования / Ю. А. Ивашенко, А. Д. Лобанов // Бетон и железобетон. – 1984. – № 11. – С. 14–15.
18. Красинский Н. П. К определению полной диаграммы сжатия бетона. / Н. П. Красинский // Совершенствование методов расчёта и исследование новых типов железобетонных конструкций. – Л., 1987. – С. 92–97.
19. Роговой С. И. К совершенствованию деформационной модели расчёта бетона и железобетона / С. И. Роговой, Е. Н. Клюка, Р. И. Пахомов // Ресурсозберігаючі технології в проектуванні, землевпорядкуванні та будівництві : вісник КНУ ім. Михайла Остроградського. – Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2011. – Вип. 1/2011 (66), ч. 1. – С. 108–114.
20. Узун И. А. Расчётные модели железобетонных элементов : монография / И. А. Узун. – Одесса : ИМК «Город мастеров», 2000. – 248 с.
21. Яшин А. В. Некоторые данные о деформациях и структурных изменениях бетона при осевом сжатии / А. В. Яшин // Новое о прочности железобетона / под ред. К. В. Михайлова. – М. : Стройиздат, 1977. – С. 17–30.
22. Бондаренко В. М. Расчётные модели силового сопротивления железобетона : монография / В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов. – М. : Изд-во «АСВ», 2004. – 471 с.
23. Голишев О. Б. Курс лекцій з основ розрахунку будівельних конструкцій і з опору залізобетону / О. Б. Голишев, А. М. Бамбура. – К. : Логос, 2004. – 339 с.
24. Байков В. Н. Особенности разрушения бетона, обусловленные его ортотропным деформированием / В. Н. Байков // Бетон и железобетон. – 1988. – № 12. – С. 13–15.
25. Байков В. Н. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей / В. Н. Байков, С. В. Горбатов, З. А. Димитров // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1977. – № 6. – С. 15–18.
26. Бондаренко В. М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона / В. М. Бондаренко, С. В. Бондаренко. – М. : Стройиздат, 1982. – 287 с.
27. Бабищ Є. М. До питання побудови діаграми деформування бетону та визначення коефіцієнта повноти епюри напружень / Є. М. Бабищ, Ю. О. Крусь // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди : зб. наук. праць. – Рівне : РДТУ, 2001. – Вип. 6. – С. 94–104.
28. Крусь Ю. А. К определению коэффициента полноты эпюры сжимающих напряжений в бетоне / Ю. А. Крусь // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій : зб. наук. праць Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2007. – Вип. 7. – С. 35–46.

29. Гвоздев А. А. К вопросу о поведении железобетонных конструкций в стадии, близкой к разрушению / А. А. Гвоздев, В. Н. Байков // *Бетон и железобетон*. – 1977. – № 9. – С. 22–24.
30. Гуца Ю. П. К совершенствования расчёта деформаций железобетонных элементов / Ю. П. Гуца, Л. Л. Лемыш // *Напряжённно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций* : сб. науч. трудов. – М. : НИИЖБ, – 1986. – С. 26–39.
31. Карпенко Н. И. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, А. Н. Петров // *Напряжённно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций* : сб. науч. трудов. – М. : НИИЖБ, 1986. – С. 7–25.
32. Бронштейн И. Н. Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов) / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Гос. изд. техн.-теор. лит.-ры, 1956. – 608 с.
33. Мурашёв В. И. Трещиноустойчивость, жёсткость и прочность железобетона / В. И. Мурашёв. – М. : Проммашстройиздат, 1950. – 184 с.
34. Hsu L. S. Behavior of High Strength Concrete and Slender Reinforced Concrete Columns With and Without Steel Fibers : A Dissertation...PhD / Hsu L. S. ; Faculty of New Jersey Institute of Technology, Department of Civil and Environmental Engineering. – October, 1992. – 266 p.
35. Леонтьев Н. Л. Техника статистических вычислений / Н. Л. Леонтьев. – М. : Лесная промышленность, 1966. – 352 с.
36. Gerstner F. J. R. Handbuch der Mechanik. Band 1 : Mechanik fester Körper / Gerstner F. J. R. – Prag, 1831. – 663 p.
37. Залигер Р. Железобетон: его расчёт и проектирование / Залигер Р. ; пер. с немец. Рейнберга Л. В. и Чечулина Н. Н. ; под ред. проф. Каменцева П. Я. 5-е изд. – М.-Л. : ГНТИ, 1931. – 671 с.
38. Столяров Я. В. Введение в теорию железобетона / Р. Залигер. – М.-Л. : Госстройиздат, 1941. – 447 с.
39. Hognestad E. A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members / Hognestad E. // *University of Illinois Engineering Experiment Station. Bulletin Series No. 399*. – 1951. – 128 p.
40. Hognestad E. Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design / Hognestad E., Hanson N. W., McHenry D. // *ACI Journal Proceedings*. – December 1955. – Vol. 52. – No 12. – Pp. 455–479.
41. Rüsч H. Research Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete / Rüsч H. // *ACI Journal Proceedings*. – July 1960. – Vol. 57, No. 1. – Pp. 1–28.
42. Лолейт А. Ф. Инструкция для подбора сечений железобетонных элементов по критическим усилиям / А. Ф. Лолейт. – М. : ВНИИТОБ, 1933. – 82 с.
43. Schüle F. Untersuchung des Einflusses der Druckspannungen in Eisenbetonbalken und der Breite der Druckplatten. Längenänderungen von Mörtel und Beton beim Erhärten: Mitteilungen der Materialprüfungs-Anstalt am Schweiz / Polytechnikum in Zürich. Zürich : Selbstverl, 1909. – 86 s.
44. Sturman G. Effect of Flexural Strain Gradients on Microcracking and Stress-Strain Behaviour of Concrete / Sturman G., Shah S., Winter G. // *ACI Journal Proceedings*. – 1965. – Vol. 62, No. 3. – Pp. 805–822.
45. Young L. E. Simplifying Ultimate Flexural Theory by Minimizing the Moment of the Stress Block / Young L. E. // *ACI Journal Proceedings*. – November 1960. – Vol. 57, No. 5. – Pp. 549–556.
46. Saenz L. P. Discussion of Paper «Equation for the Stress-Strain Curve» by P. Desayi and S. Krishnan / Saenz L. P. // *ACI Journal Proceedings*. – September 1964. – Vol. 61, No. 9. – Pp. 1229–1235.
47. Гуца Ю. П. Расчёт деформаций конструкций на всех стадиях при кратковременном и длительном нагружениях / Ю. П. Гуца, Л. Л. Лемыш // *Бетон и железобетон*. – 1985. – № 11. – С. 13–16.
48. Бамбура А. Н. Диаграмма «напряжения-деформация» для бетона при центральном сжатии / А. Н. Бамбура // *Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона* : сб. науч. трудов. – Ростов-на-Дону : РИСИ, 1980. – С. 19–22.
49. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / А. Н. Бамбура, В. Я. Бачинский, Н. В. Журавлева, И. Н. Пешкова. – К. : НИИСК Госстроя СССР, 1987. – 25 с.
50. Everard N. J. Ultimate Strength Design-Serviceability Investigation. A Unified Method for Reinforced Concrete Bridge Design / Everard N. J. // *ACI Journal Proceedings. Special Publication SP-23*. – April 1967. – Pp. 10–19.

51. Hsu C. T. Generalized Moment-Curvature Relationships for Singly and Doubly Reinforced Beams / Hsu C. T., Mirza M. S. // McGill University. Structural Concrete. Series No. 24. – 1969. – Pp. 1–48.
52. Остапенко А. Ф. Универсальная зависимость для диаграмм деформирования бетона, арматуры и железобетонных конструкций / А. Ф. Остапенко // Бетон и железобетон. – 1992. – № 7. – С. 23–24.
53. Desayi P., Krishnan S. Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete / Desayi P., Krishnan S. // ACI Journal Proceedings. – March 1964. – Vol. 61, No. 3. – Pp. 345–350.
54. Saenz L. P. Discussion of Paper «Equation for the Stress-Strain Curve» by P. Desayi and S. Krishnan / L. P. Saenz // ACI Journal Proceedings. – September 1964. – Vol. 61, No. 9. – Pp. 1229–1235.
55. Sargin M. A General Formulation for the Stress-Strain Properties of Concrete : SM Report No. 3 / Sargin M., Handa V. K. // Solid Mechanics Division, University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada). – May 1969. – 28 p.
56. Sargin M. Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections : SM Study No. 4 / Sargin M. // Solid Mechanics Division, University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada), 1971. – 167 p.
57. Wang P.-T. Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression / Wang P.-T., Shah S. P., Naaman A. E. // ACI Journal Proceedings. – November 1978. – Vol. 75, No 11. – Pp. 603–611.
58. Ahmad S. H. Complete Stress-Strain Curve of Concrete and Nonlinear Design. Proceedings CSCE-ASCE-ACI-CEB : International Symposium on Nonlinear Design of Concrete Structures / Ahmad S. H., Shah S. P. // University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada). August 1979. – Pp. 61–81.
59. Popovics S. Preview of Stress-Strain Relationship for Concrete / Popovics S. // ACI Journal Proceedings. – March 1970. – Vol. 67, No. 3. – Pp. 243–248.
60. Popovics S. A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curves for Concrete / Popovics S. // Cement and Concrete Research. – 1973. – Vol. 3, No. 5. – Pp. 583–599.

### References

- Veretennikov, V. I., & Barmotin, A. A. (2000). O vliianii razmerov i formy secheniia elementov na diagrammu deformirovaniia betona pri vnetcentrennom szhatii [On influence of the size and shape of the cross-section of elements on the diagram of concrete deforming at eccentric compression]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (5), 27–30.
- Kholmianskii, M. M. (1989) K mekhanizmu deformirovaniia i razrusheniia betona pri szhatii i rastiazhenii [To the mechanism of deforming and fracture of concrete at compression and tension]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (9), 25–26.
- Gvozdev, A.A., Shubik, A.V., & Matkov, N.G. (1988). O polnoi diagramme szhatiia betona, armirovannogo poperechnymi setkami [On the complete diagram compression of concrete reinforced by transverse grids]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (4), 37–39.
- Rogovoi, S.I. (2002). *Nelineinoe deformirovanie v teorii zhelezobetona i raschet prochnosti normalnykh sechenii* [Nonlinear deforming in the theory of reinforced concrete and calculation of the strength of normal cross-sections].
- Tal, K.E. (1955). O deformativnosti betona pri szhatii [On the deformativity of concrete at compression]. *Issledovanie prochnosti, plastichnosti i polzuchesti stroitelnykh materialov – Study of the strength, plasticity and creep of building materials* (pp. 202–207). Gosstroizdat.
- Murashkin, G.V., Butenko, S.A., & Iavorskii, I.D. (1984). K opredeleniiu diagrammy « $\sigma$ – $\varepsilon$ » betona s nispadaushchim uchastkom. Zhelezobetonnye konstruksii. [To the determination of the « $\sigma$ – $\varepsilon$ » diagram of concrete with a falling branch. Reinforced concrete structures]. *Ekspierimentalno-teoreticheskie issledovaniia – Experimental and theoretical studies* (pp. 20–25).
- Bachinskii, V.Ia., Bambura, A.N., & Vatagin, S.S. (1984). Sviaz mezhdu napriazheniiami i deformatciiami betona pri kratkovremennom neodnorodnom szhatii [Connection between stresses and strains of concrete under short-term inhomogeneous compression]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (10), 18–19.
- Guzeev, E.A., Shevchenko, V.I., & Seilanov, L.A. (1986). Issledovanie silovykh i energeticheskikh parametrov razrusheniia betona po polnostiu ravnovesnym diagrammam ego deformirovaniia. *Izv. vuzov. Ser. Stroitelstvo i arkhitektura – Izvestiya vuzov. Ser. Construction and architecture*, (8), 1–5.

9. Degterev, V.V. (1986). Deformativnost betona szhatoi zony v zavisimosti ot ee formy i kharaktera armirovaniia [Deformativity of concrete compressed zone depending on its shape and the nature of reinforcement]. *Beton i zhelezobeton*, (8), 42–43.

10. Bezukhov, N.I. (1953). *Teoriia uprugosti i plastichnosti [Theory of elasticity and plasticity]*. Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury.

11. Nauchno-issledovatel'skii institut betona i zhelezobetona (NIIZhB) Gosstroia SSSR. (1988). *Betony. Metody opredeleniia prizmennoi prochnosti, modul'ia uprugosti i koeffitsienta Puassona [Concretes. Methods for determining the prism strength, modulus of elasticity and the coefficient of Poisson]*. (GOST 24452-80). Izdatelstvo standartov.

12. Derzhavne pidpriemstvo «Derzhavnyi naukovo-doslidnyi instytut budivelnykh konstrukttsii» (DP NDIBK). (2010). *Betony. Metody vyznachennia pryzmovoï mitsnosti, modul'ia pruzhnosti i koeffitsiienta Puassona [Concretes. Methods for determining the prism strength, modulus of elasticity and the coefficient of Poisson]* (DSTU B V.2.7-217:2009). Minrehionbud Ukrainy.

13. Bambura, A.M. (2006). *Eksperymentalni osnovy prykladnoi deformatsiinoi teorii zalizobetonu [Experimental bases of applied deformation theory of reinforced concrete]*. [Doctor dissertation abstract, Kharkivskiy derzhavnyi tekhnichnyi universytet budivnytstva ta arkhitektury].

14. Bleshchik, R.P., Zhukov, D.D., Lazovskii, D.N., Kazachek, A.A., Kondratchik, T.M., Petcold, T.M. ... & Shubert, I.M. (2003). *Zhelezobetonnye konstrukttsii. Osnovy teorii, rascheta i konstruirovaniia [Reinforced concrete structures. Bases of theory, calculation and design]*. (T. M. Petcold, & V. V. Tur, Ed.). Brestskii gosudarstvennyi tekhnicheskii univesitet.

15. Riush, G. (1961). *Issledovanie raboty izgibaemykh elementov s uchetom uprugoplasticheskikh deformatsii betona [Investigation of the work of bendable elements, taking into account the elastoplastic deformations of concrete]*. *Materialy mezhdunarodnogo soveshchaniia po raschetu stroitelnykh konstrukttsii – Study of the work of bending elements taking into account elastic-plastic deformations of concrete: materials of the international meeting on the calculation of building structures* (pp. 183–199). Gosstroizdat.

16. Bich, P.M. (1987). *Eksperimentalno-teoreticheskie issledovaniia zakriticheskikh kharakteristik betona [Experimental and theoretical investigations of the core characteristics of concrete]*. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (3), 26–27.

17. Ivashenko, Iu.A., & Lobanov, A.D. (1984). *Issledovanie protsessa razrusheniia betona pri raznykh skorostiakh deformirovaniia [Study of the destruction process of concrete at different deforming rates]*. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (11), 14–15.

18. Krasinskii, N.P. (1987). *K opredeleniiu polnoi diagrammy szhatiia betona [To determining of the full diagram of concrete compression]*. In *Sovershenstvovanie metodov rascheta i issledovanie novykh tipov zhelezobetonnykh konstrukttsii – Improvement of calculation methods and research of new types of reinforced concrete structures* (pp. 92–97).

19. Rogovoi, S.I., Kliuka, E.N., Pakhomov, R.I. (2011). *K sovershenstvovaniiu deformatsionnoi modeli rascheta betona i zhelezobetona [To the improvement of the deformational model for the calculation of concrete and reinforced concrete]*. *Resursozberigaiuchi tekhnologii v proektuvanni, zemlevporiadkuvanni ta budivnitctvi – Resource-saving technologies in design, land management and everyday life : Bulletin of KNU im. Mikhail Ostrogradsky*, 1/2011(66), 108–114.

20. Uzun, I.A. (2000). *Raschetnye modeli zhelezobetonnykh elementov [Calculation models of reinforced concrete elements]*. IMK «Gorod masterov».

21. Iashin, A.V. (1977). *Nekotorye dannye o deformatsiiax i strukturnykh izmeneniiax betona pri osevom szhatii [Some data on strains and structural changes of concrete at axial compression]*. In K. V. Mikhailov (Ed.), *Novoe o prochnosti zhelezobetona – New about the strength of reinforced concrete* (pp. 17–30). Stroizdat.

22. Bondarenko, V.M., & Kolchunov, V.I. (2004). *Raschetnye modeli silovogo soprotivleniia zhelezobetona [Calculation models of the force resistance of reinforced concrete]*. Izdatelstvo «ASV».

23. Holyshev, O.B., & Bambura, A.M. (2004). *Kurs lektsii z osnov rozrakhunku budivelnykh konstrukttsii i z oporu zalizobetonu [Course of lectures on the bases of calculation of building structures and on the resistance of reinforced concrete]*. Lohos.

24. Baikov, V.N. (1988). Osobennosti razrusheniia betona, obuslovlennye ego ortotropnym deformirovaniem [Peculiarities of concrete fracture caused by its orthotropic deforming]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (12), 13–15.
25. Baikov, V.N., Gorbato, S.V., & Dimitrov, Z.A. (1977). Postroenie zavisimosti mezhdu napriazheniiami i deformatsiiami szhatogo betona po sisteme normiruemykh pokazatelei [Building of the relationship between stresses and strains of compressed concrete by the system of standardized indicators]. *Izv. vuzov. Ser. Stroitelstvo i arkhitektura – Izvestiya vuzov. Ser. Construction and architecture*, (6,) 15-18.
26. Bondarenko, V.M. & Bondarenko, S.V. (1982). *Inzhenerye metody nelineinoi teorii zhelezobetona [Engineering Methods of Nonlinear Theory of Reinforced Concrete]*. Stroiizdat.
27. Babych, Ye. M., & Krus, Yu. O. (2001). Do pytannia pobudovy diahramy deformuvannia betonu ta vyznachennia koefitsiienta povnoty epiury napruzhen [To the question of building of diagram of concrete deforming and determining of coefficient completeness epure of stresses]. *Resursoekonomni materialy, konstruksii, budivli ta sporudy – Resource-saving materials, structures, buildings and structures* (Vol. 6, pp. 94–104. RDTU.
28. Krus, Iu. A. (2007). K opredeleniiu koefitcianta polnoty epiury szhimaiushchikh napriazhenii v betone [To determining of coefficient completeness epure of compressive stresses in concrete]. *Mekhanika i fizyka ruinuvannia budivelnykh materialiv i konstruksii* (Vol. 7, pp. 35–46). Kameniar.
29. Gvozdev, A.A., & Baikov, V.N. (1977). K voprosu o povedenii zhelezobetonnykh konstruksii v stadii, blizkoi k razrusheniiu [To the question of the behavior of reinforced concrete structures in the stage close to destruction]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (9), 22–24.
30. Gushcha, Iu.P., & Lemysh, L.L. (1986). K sovershenstvovaniia rascheta deformatsii zhelezobetonnykh elementov [To improving the calculation of strains of reinforced concrete elements]. *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksii – Stress-strain state of concrete and reinforced concrete structures* (pp. 26–39). NIIZhB.
31. Karpenko, N.I., Mukhamediev, T.A., & Petrov, A.N. (1986). Iskhodnye i transformirovannye diagrammy deformirovaniia betona i armatury [Initial and transformed diagrams of concrete and reinforcement deforming]. *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksii – Stress-strain state of concrete and reinforced concrete structures* (pp. 7–25). NIIZhB.
32. Bronshtein, I.N., & Semendiaev, K.A. (1956). *Spravochnik po matematike (dlia inzhenerov i uchashchikhsia vtuzov) [Handbook of Mathematics (for engineers and students of technical universities)]*. Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury.
33. Murashev, V.I. (1950). *Treshchinoustoichivost, zhestkost i prochnost zhelezobetona [Crack sustainability, stiffness and strength of reinforced concrete]*. Prommashstroiiizdat.
34. Hsu, L.S. (1992). *Behavior of High Strength Concrete and Slender Reinforced Concrete Columns With and Without Steel Fibers* [PhD Dissertation, Faculty of New Jersey Institute of Technology, Department of Civil and Environmental Engineering].
35. Leontev, N.L. (1966). *Tekhnika statisticheskikh vychislenii [Technique of statistical calculations]*. Lesnaia promyshlennost.
36. Gerstner, F.J.R. (1831). *Handbuch der Mechanik. Band 1: Mechanik fester Körper*.
37. Zaliger, R. (1931). *Zhelezobeton: ego raschet i proektirovanie [Reinforced concrete: its calculation and design]*. (5<sup>th</sup> ed.). (Reinberg, L. V., & Chechulin, N. N., Trans.; Kamentcev, P. Ia, Ed.). Gosudarstvennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatelstvo.
38. Stoliarov, Ia.V. (1941). *Vvedenie v teoriuu zhelezobetona [Introduction to the theory of reinforced concrete]*. Gosstroiiizdat.
39. Hognestad, E.A (1951). *Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members*. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series No. 399.
40. Hognestad, E., Hanson, N.W., & McHenry D. (1955). Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design. *ACI Journal Proceedings*, 52(12), 455–479.
41. Rüsç, H. (1960). Research Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete. *ACI Journal Proceedings*, 57(1), 1–28.
42. Loleit, A.F. (1933). *Instruktsiia dlia podbora sechenii zhelezobetonnykh elementov po kriticheskim usiliiam [Instructions for selecting cross-sections of reinforced concrete elements according to critical efforts]*. VNIITOB.

43. Schüle, F. (1909). *Untersuchung des Einflusses der Druckspannungen in Eisenbetonbalken und der Breite der Druckplatten. Längenänderungen von Mörtel und Beton beim Erhärten [Mitteilungen der Materialprüfungs-Anstalt am Schweiz, Polytechnikum in Zürich]*. Selbstverl.
44. Sturman, G., Shah, S., & Winter, G. (1965). Effect of Flexural Strain Gradients on Microcracking and Stress–Strain Behaviour of Concrete. *ACI Journal Proceedings*, 62(3), 805–822.
45. Young, L.E. (1960). Simplifying Ultimate Flexural Theory by Minimizing the Moment of the Stress Block. *ACI Journal Proceedings*, 57(5), 549–556.
46. Saenz, L.P. (1964). Discussion of Paper «Equation for the Stress-Strain Curve» by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9), 1229–1235.
47. Gushcha, Iu.P., & Lemysh, L.L. (1985). Raschet deformatcii konstrukcii na vsehkh stadiiakh pri kratkovremennom i dlitelnom nagruzhenniakh [Calculation of structural deformations at all stages under short-term and long-term loadings]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (1), 13–16.
48. Bambura, A.N. (1980). Diagramma «napriazheniia-deformatciia» dlia betona pri tcentralnom szhatii [«Stress-strain» diagram for concrete under central compression]. *Voprosy prochnosti, deformativnosti i treshchinostoikosti zhelezobetona – Issues of strength, deformability and crack resistance of reinforced concrete* (pp. 19–22). RISI.
49. Bambura, A.N., Bachinskii, V.Ia., Zhuravleva, N.V., & Peshkova, I.N. (1987). *Metodicheskie rekomendacii po utochnennomu raschetu zhelezobetonnykh elementov s uchetom polnoi diagrammy szhatii betona [Methodical recommendations for the refined calculation of reinforced concrete elements, taking into account the complete diagram of concrete compression]*. NIISK Gosstroia SSSR.
50. Everard, N.J. (1967). Ultimate Strength Design–Serviceability Investigation. A Unified Method for Reinforced Concrete Bridge Design. *ACI Journal Proceedings*, Special Publication SP-23, 10–19.
51. Hsu, C.T., & Mirza, M.S. (1969). Generalized Moment–Curvature Relationships for Singly and Doubly Reinforced Beams. *Structural Concrete*, 24, 1–48.
52. Ostapenko, A.F. (1992). Universalnaia zavisimost dlia diagramm deformirovaniia betona, armatury i zhelezobetonnykh konstrukcii [Universal dependence for diagrams of concrete, reinforcement and reinforced concrete structures deforming]. *Beton i zhelezobeton – Concrete and reinforced concrete*, (7), 23–24.
53. Desayi, P., & Krishnan, S. (1964). Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete. *ACI Journal Proceedings*, 61(3), 345–350.
54. Saenz, L.P. (1964). Discussion of Paper «Equation for the Stress-Strain Curve» by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9), 1229–1235.
55. Sargin, M., & Handa, V.K. (1969). *A General Formulation for the Stress-Strain Properties of Concrete* [SM Report No. 3, Solid Mechanics Division, University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada)].
56. Sargin, M. (1971). *Stress Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections* [SM Study No. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada)].
57. Wang, P.-T., Shah, S.P., & Naaman, A.E. (1978). Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression. *ACI Journal Proceedings*, 75(11), 603–611.
58. Ahmad, S.H., & Shah, S.P. (1979). Complete Stress-Strain Curve of Concrete and Nonlinear Design. *Proceedings CSCE-ASCE-ACI-CEB: International Symposium on Nonlinear Design of Concrete Structures* (pp. 61–81). University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada).
59. Popovics, S. (1970). Preview of Stress-Strain Relationship for Concrete. *ACI Journal Proceedings*, 67(3), 243–248.
60. Popovics, S. (1973). A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curves for Concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5), 583–599.

Отримано 25.01.2022

UDC 691.327:539.383

**Yurii Krus**

PhD in Technical Sciences, Senior Research Fellow, Associate Professor  
Associate Professor of the Department of Automobile Roads, Soil Bases and Foundations  
National University of Water and Environmental Engineering (Rivne, Ukraine)  
E-mail: [alkrous@ukr.net](mailto:alkrous@ukr.net), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5271-7765>

## CONNECTION BETWEEN STRESSES AND STRAINS OF CONCRETE UNDER DIFFERENT FORCE MODES OF SHORT-TERM AXIAL COMPRESSION

Modern design of bended reinforced concrete constructions uses analytical methods of calculation involving deformative models, the main tool of which is the actual diagram of concrete state, which establishes the connection between its stresses  $\sigma_b$  and relative strains  $\varepsilon_b$  in compressed and tensile zones of the cross-section. Currently, there is no a unified methodics of establishing such a diagram, and researchers obtain it by indirect methods that differ from each other. That is why the graph-analytical building and mathematical description of the functional dependence of the diagram of concrete state based on clear and accurate physical representations we consider as an important and urgent problem.

The lack of a unified methodics for obtaining a diagram of concrete state cast doubt the reliability of the results of the calculations carried out, does not allow to compare, explain and link into a unified whole the many experimental and theoretical data accumulated by generations of researchers.

In a number of scientific publications, an opinion is expressed that a diagram of concrete state can be obtained by simultaneous using of diagrams of concrete deforming under different force modes of short-term axial compression – «soft» and «rigid», testing standard concrete specimens to failure at a constant rate of stress and strains growth respectively. If the «soft» force mode without unnecessary difficulties can be realized on traditional hydraulic presses, the creation of «rigid» mode requires the manufacture of different from standard special presses or auxiliary devices, capable of taking efforts and unloading concrete after reaching the maximum of compressive stresses. The lack of a unified approach to obtaining diagrams of deforming under rigid-mode loadings leads to contradictory results.

Insufficiently investigated in the general problem are the issues of theoretical justification, development and approbation of diagram of concrete rigid-mode deforming  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , complex application of which simultaneously with the diagram of deforming  $\sigma_b \sim \varepsilon_b$  in conditions of «soft» force mode will allow to obtain a reliable and convincing diagram of concrete state.

The main purpose of the research is a graph-analytical building and mathematical description of the dependence  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$ , based on clear and accurate physical representations, which experimental obtaining causes serious technical difficulties and economic costs, and the accuracy of measurements made and the reliability of the results obtained causes big doubts.

The article develops the criteria to which the dependence  $\bar{\sigma}_b \sim \varepsilon_b$  should correspond, based on modern ideas about the nature of strength and deforming and following from the essence of physical and mechanical processes in concrete; the adequate structure of the functional connection has been established; the boundary conditions have been drawn up and constant coefficients have been determined; a comparative analysis of the calculation results using the proposed dependence with the corresponding experimental data was performed.

As a result, an easy-to-use and mathematical processing of an approximate function of the diagram of deforming is proposed, which reflects the dependence between stresses and strains of concrete under the «rigid» mode of homogeneous compression. Its simultaneous use with the previously obtained diagram for soft-mode loading makes it possible to graphically build and mathematically describe a stable and free from excessive influencing factors the diagram of concrete state, suitable for based on the deformative model of cross-sections of modern calculations of bended reinforced concrete constructions for all groups of limiting states and assessment of the heterogeneous stress-strain state of constructional cross-sections at any stage of loading up to fracture.

**Keywords:** concrete; diagrams of deforming and state; «soft» and «rigid» loading modes; deformative model of cross-sections.

Fig.: 1. References: 60.