Серія «Курс за вибором»

Навчально-методичний посібник

ТКАЧ Юлія Миколаївна

МАТЕМАТИКА.
ЗАДАЧІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ В МАТЕМАТИЦІ

Код Т12923У. Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *О. В. Сміян*.
Підписано до друку 25.06.2011. Формат 60×90/16. Папір газетний.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 11.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.com.ua

З питань реалізації звертатися за тел.: у Харкові – (057) 712-91-44, 712-90-87;
Києві – (044) 599-14-53, 377-73-23; Білій Церкві – (04563) 6-90-92;
Вінниці – (0432) 55-61-10,27-70-08; Дніпропетровську – (056) 785-01-74;
Донецьку – (062) 261-73-17; Житомирі – (0412) 41-27-95, 44-81-82;
Івано-Франківську – (0342) 72-41-54; Кривому Розі – (056) 401-27-11;
Луганську – (0642) 53-34-51; Львові – (032) 244-14-36 ; Миколаєві – (0512) 37-85-87;
Одесі – (048)737-46-54; Сімферополі – (0652) 54-21-38 ; Тернополі – (0352) 51-28-27 ;
Хмельницькому – (0382)70-63-16 ; Черкасах – (0472) 51-22-51, 36-72-14;
Чернигові – (0462) 62-27-43

E-mail: commerce@ranok.com.ua
«Книга поштою»: 61045 Харків, а/с 3355. Тел. (057) 717-74-55, (067) 546-53-73.
E-mail: pochta@ranok.com.ua
www.ranok.com.ua

3 стр. обл

УДК 371.321.1:[512+330.4](072)
ББК 74.262.21+74.266.5
Т48

Схвалено до використання в загальноосвітніх навчальних закладах
МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
(лист від 24.11.2009 р. № 1/11-9522)

Серія «Курс за вибором»

Рецензенти:
М. І. Бурда, головний вчений секретар НАПН України, дійчний член НАПН України, доктор пед. наук, професор;
О. Я. Базілінська, доцент кафедри Національного університету «Києво-Могилянська академія», кандидат економ. наук;
Л. М. Аніщенко, заступник директора з навчально-виховної роботи ліцею № 15 м. Чернігова, учитель-методист

Ткач Ю. М.
Т48 Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчально-методичний посібник / Ю. М. Ткач.— Х.: Вид-во «Ранок», 2011.— 176 с.— (Курс за вибором).
ISBN 978-617-540-267-2
Пропонований посібник містить плани-конспекти занять курсу за вибором з математики, що допоможе розширити та поглибити уявлення учнів про застосування математики в практичній діяльності, різних галузях науки.
Наведено приклади розв'язування задач з докладними коментарями, а також контрольні запитання до кожної теми.
Призначено для вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.
УДК 371.321.1:[512+330.4](072)
ББК 74.262.21+74.266.5

ISBN 978-617-540-267-2

ВСТУП

Після прийняття Концепції профільного навчання в старшій школі постала проблема вибору та запровадження різних профілів навчання у загальноосвітніх навчальних закладах. У зв'язку з цим з'явилася необхідність у встановленні міжпредметних зв'язків між профільними та іншими шкільними предметами. Зокрема, в класах економічного профілю виникає потреба у встановленні міжпредметних зв'язків між математикою та економікою.

Основними завданнями навчально-методичного посібника є формування стійкого інтересу в учнів до предмета «Алгебра і початки аналізу»; застосування отриманих на цих уроках знань, умінь і навичок до розв'язування задач економічного змісту.

Курс за вибором «Задачі економічного змісту в математиці» розроблений з метою формування елементів економічної грамотності засобами математики та підготовки учнів до навчання у вищих навчальних закладах за економічними спеціальностями.

Посібник містить програму курсу за вибором для учнів 10–11 класів з орієнтовним календарно-тематичним плануванням, що сприятиме підвищенню ефективності організації навчального процесу.

Основна частина даного посібника складається із восьми тем. Кожна тема містить теоретичний та практичний матеріали, що висвітлюють економічні питання, включені до програми курсу за вибором «Задачі економічного змісту в математиці». Пропонуються також методичні рекомендації щодо викладання теоретичного матеріалу та формування відповідних умінь і навичок в учнів.

У якості домашнього завдання, якщо не зазначено інше, наприкінці кожного заняття слід запропонувати учням вивчити конспект і розв'язати систему вправ, аналогічну до тієї, що пропонувалась у класі.

Посібник буде корисним для учителів математики як при викладанні в класах економічного профілю, так і для забезпечення прикладної спрямованості курсу «Алгебра і початки аналізу» в класах інших профілів.

Програма курсу за вибором «Задачі економічного змісту в математиці» для учнів 10–11 класів

Пояснювальна записка

На сучасному етапі розвитку України відбувається закономірне посилення ролі економічної освіти. Молоде покоління повинно отримувати знання про економічну сферу діяльності, що сприятиме, зокрема, свідомому вибору професії економічного спрямування. Відповідно до Національної доктрини розвитку освіти держава забезпечує економічну освіту. Згідно з Державним стандартом базової і повної середньої освіти одним із завдань освітньої галузі «Математика» у старшій школі є розширення та поглиблення уявлень учнів про застосування математики в практичній діяльності, різних галузях науки.

Одним зі шляхів виконання цього завдання є формування елементів економічної грамотності засобами математики, зокрема застосування знань, умінь і навичок з предмета «Алгебра і початки аналізу» до розв'язування задач економічного змісту.

Курс за вибором для учнів 10–11 класів розрахований на 70 годин. Він дозволяє розширити уявлення учнів про застосування математики та її місце в економіці, сприяє поглибленню та узагальненню знань, умінь і навичок з математики. Розв'язування задач економічного змісту надасть можливість мотивувати, активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів та сприятиме практичному застосуванню набутих знань. Вивчення курсу за вибором може здійснюватися за рахунок використання годин варіативної частини Типового навчального плану.

Мета курсу — формування в учнів елементів економічної грамотності засобами математики та підготовка їх до навчання у вищих навчальних закладах за економічними спеціальностями.

Основні завдання курсу:

- формування в учнів уявлень про принципи та методи математики в економіці;
- застосування набутих на уроках знань, умінь і навичок з алгебри і початків аналізу до розв'язування задач економічного змісту;
- розвиток в учнів логічного мислення, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;
- виховання економічно грамотної особистості;

- формування елементів економічної грамотності;
- формування життєвих і соціально-ціннісних уявлень учнів.

Програма курсу за вибором розроблена з урахуванням структури та послідовності вивчення тем, що входять до складу програми з алгебри і початків аналізу рівня стандарту. Зважаючи на підготовленість учнів, учитель може розширити та поглибити або, навпаки, спростити запропонований у програмі зміст теми. Розподіл навчального часу є орієнтовним. Резерв часу може бути використаний на розсуд учителя, зокрема як на повторення, узагальнення та систематизацію знань учнів, так і для збільшення кількості годин на детальніше вивчення тих чи інших тем програми.

При виборі методів навчання необхідно враховувати як об'єктивні фактори (цілі, завдання та зміст навчання), так і суб'єктивні (рівень підготовки учнів тощо). Методично обґрунтоване поєднання різних форм і методів навчання сприятиме підвищенню рівня та ефективності викладання курсу.

Підвищенню ефективності занять сприятиме використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема програмного засобу GRAN1.

Рекомендації щодо роботи за програмою

Під час навчання необхідно враховувати мету та завдання вивчення курсу за вибором, особливості його змісту та структури. Вимоги до навчальних досягнень учнів, сформульовані у програмі, сприятимуть полегшенню планування вивчення кожної теми, підвищенню ефективності визначених учителем організаційних форм контролю. Методи, форми та засоби навчання доцільно добирати відповідно до рівня навчальних досягнень учнів, особливостей їх розумової діяльності та умов навчання.

У програмі курсу за вибором «Задачі економічного змісту в математиці» увага приділяється основним змістовим лініям курсу алгебри: поняття про число; тотожні перетворення; рівняння й нерівності; вчення про функцію; елементи статистики; комбінаторики й теорії імовірностей.

10 клас

Під час вивчення *теми 1 «Функції, многочлени, рівняння та нерівності в економіці»* учні знайомляться з поняттями задачі економічного змісту, математичної моделі в економіці та математичного моделювання; із функціями витрат і доходу, попиту та пропозиції; еластичністю, беззбитковістю та ін.

При цьому доцільно розглянути три етапи математичного моделювання на прикладі однієї або декількох задач (зокрема, задач про використання сировини, дієту та ін.).

Необхідно звернути увагу учнів на наслідки втручання держави у процес ціноутворення та залежність доходів від еластичності попиту.

Важливо, щоб учні не лише знали теоретичний матеріал теми, але й усвідомлювали його значення в економіці, вміли використовувати при розв'язуванні задач економічного змісту. Тому після ознайомлення учнів із характером та особливостями функцій попиту та пропозиції варто запропонувати їм самостійно знайти точку рівноваги (тобто рівноважну ціну та обсяг продажу) за графіками відповідних функцій. Кожен крок учні повинні аргументувати, посилаючись на відповідний теоретичний матеріал. Допомога вчителя на даному етапі, як правило, необхідна лише для коригування обґрунтувань кроків.

Слід приділити увагу питанню аналізу беззбитковості. Учитель має пояснити структуру загальних витрат $(TC = VC + FC)$, зобразити витрати графічно та підвести учнів до самостійного визначення за графіком точки беззбитковості, знайти разом з учнями проміжки збитків і доходів.

Доцільно дослідити беззбитковість на прикладі конкретної задачі: повторити етапи знаходження точки рівноваги графічно та допомогти учням самостійно знайти її аналітично.

У ході вивчення *теми 2 «Тригонометричні функції в економіці»* продовжується вивчення властивостей функцій витрат і доходу, а також функцій попиту та пропозиції. Під час вивчення теми необхідно пояснити учням, як змінюється беззбитковість залежно від тангенса кута нахилу функцій витрат і доходу. Аналогічні міркування слід провести щодо функцій попиту та пропозиції.

При вивченні *теми 3 «Елементи прикладної математики»* вчитель повинен актуалізувати знання учнів щодо простого та складного відсотків, увести поняття еквівалентної та ефективної ставок, розв'язати декілька прикладних (економічних) задач. Особливу увагу необхідно звернути на застосування теорії ігор до розв'язування задач на прийняття рішень.

11 клас

Матеріал тем, що вивчають похідну та її застосування, первісну та інтеграл з курсу алгебри і початків аналізу, має широке практичне застосування в економіці.

Вивчення *теми 1 «Похідна та її застосування до розв'язування задач економічного змісту»* варто розпочати із узагальнення економічного змісту похідної за допомогою декількох прикладів розв'язування задач (наприклад, знаходження граничної виручки та витрат, зростання продуктивності праці тощо). Необхідно сформувати в учнів уміння знаходити за допомогою похідної максимальний дохід, прибуток, витрати. Особливу увагу слід приділити визначенню еластичності попиту через похідну.

При вивченні *теми 2 «Показникова, логарифмічна та степенева функції на прикладі задач з економіки»* необхідно скерувати діяльність учнів на розв'язування задач про збільшення початкової суми в n разів у загальному випадку через розв'язування задач про подвоєння/потроєння грошей. Крім того, необхідно ввести поняття про неперервний компаунд (неперервне нарахування складних відсотків).

Під час вивчення *теми 3 «Елементи теорії імовірностей і математичної статистики в економіці»* важливо досягти розуміння учнями прикладного змісту поняття математичного сподівання випадкової величини та необхідності введення міри розсіяння випадкової величини на прикладах задач економічного змісту. Корисним є розв'язування задач на визначення ймовірності успіху вкладу або оцінки ступеня ризику та прийняття рішення відносно випуску та реалізації товару тощо.

Економічна ситуація, яка об'єднує групу задач, під час розв'язування яких потрібно розглянути значення величини y як функцію часу x, що розраховується від a до b, наприклад знаходження обсягу продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$, якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t, має бути розглянута при вивченні *теми 4 «Інтеграл та його застосуванняв економіці»*. Слід також розв'язати задачі про обчислення величини неперервного доходного потоку та навчити учнів робити оцінку вигоди споживачів і виробників (графічно та аналітично).

При вивченні *теми 5 «Рівняння, нерівності та їхні системи в економіці»* слід зосередити увагу на балансі між окремими галузями та на проблемі встановлення взаємозв'язків між галузями через випуск та споживання різних видів продукції, зокрема розглянути модель Леонтьєва у дво- та тривимірному просторах. Разом з тим не можна оминути актуальні сьогодні питання амортизації боргу та створення викупних фондів.

Орієнтовний розподіл навчального часу

Клас	Номер теми	Назва теми	Кількість годин
10	1	Функції, многочлени, рівняння та нерівності в економіці	17
	2	Тригонометричні функції в економіці	5
	3	Елементи прикладної математики	8
		Резерв часу і повторення	5
		Разом	35
11	1	Похідна та її застосування до розв'язування задач економічного змісту	7
	2	Показникова, логарифмічна та степенева функції на прикладі задач з економіки	5
	3	Елементи теорії імовірностей і математичної статистики в економіці	4
	4	Інтеграл та його застосування в економіці	7
	5	Рівняння, нерівності та їхні системи в економіці	7
		Резерв часу і повторення	5
		Разом	35
		УСЬОГО	70

Програма курсу за вибором

Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

10 клас (35 год)

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
17	**Тема 1. Функції, многочлени, рівняння та нерівності в економіці** Задачі економічного змісту. Модель і математичне моделювання. Математичне моделювання на прикладах задач з економіки. Функції попиту, пропозиції та їх взаємодія. Точка рівноваги. Еластичність та її види. Виручка та еластичність. Ціноутворення та наслідки втручання держави у цей процес. Функції витрат і доходу. Точка беззбитковості.	**Учень (учениця):** • *формулює* означення попиту, пропозиції, еластичності попиту та пропозиції, функцій витрат та доходу; закони попиту та пропозиції за графіками їх функцій; • *будує* графіки функцій попиту, пропозиції, витрат та доходу; • *обчислює* рівноважну ціну та обсяг рівноваги за функціями попиту та пропозиції; еластичність попиту (за ціною, за доходом і перехресну) та еластичність пропозиції; • *визначає* залежність виручки від еластичності попиту; • *знаходить* рівноважну ціну та обсяг продажу; точку беззбитковості; значення функцій при заданих значеннях аргумента та значення аргумента, за яких функція набуває даного значення; • *користується* різними способами визначення точки рівноваги та точки беззбитковості (графічно та аналітично); • *виконує та пояснює* перетворення графіків функцій; • *досліджує* властивості функцій і *використовує* одержані результати при побудові графіків функцій; • *застосовує* властивості функцій до розв'язування задач економічного змісту; • *описує* характер та особливості поведінки функцій попиту, пропозиції, витрат та доходу; види еластичності попиту та пропозиції.

Продовження таблиці

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
5	**Тема 2. Тригонометричні функції в економіці** Функції витрат і доходу залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги. Функції попиту та пропозиції залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги.	**Учень (учениця):** • *виконує* перетворення графіків функцій попиту, пропозиції, доходу та витрат залежно від зміни тангенса кута їх нахилу; • *встановлює та обчислює* точку рівноваги та точку беззбитковості після зміни тангенса кута нахилу відповідних функцій; • *формулює* означення тангенса кута та його властивості; • *описує* застосування властивостей тригонометричних функцій до опису реальних процесів.
8	**Тема 3. Елементи прикладної математики** Простий відсоток. Поточна та майбутня вартості грошей. Позика. Складний відсоток. Конверсійний період. Простий та складний відсотки. Методи теорії ігор і прийняття рішень.	**Учень (учениця):** • *формулює* зміст понять простого та складного відсотків, поточної та майбутньої вартостей грошей, конверсійного періоду; • *розв'язує* задачі на знаходження поточної та майбутньої вартостей грошей (за умови нарахування простого та складного відсотків); • *описує* підходи теорії ігор до розв'язування задач економічного змісту; матрицю гри; • *застосовує* теорію ігор до розв'язування задач на прийняття рішень в умовах варіативності стратегій.
5	Резерв часу і повторення	

11 клас (35 год)

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
7	**Тема 1. Похідна та її застосування до розв'язування задач економічного змісту** Граничний дохід, граничний прибуток і граничні витрати. Максимальний дохід і максимальний прибуток. Мінімізація витрат. Еластичність попиту.	**Учень (учениця):** • *формулює* означення доходу та прибутку; загальних, постійних і змінних витрат, їх середніх величин; • *описує* поняття максимального доходу та максимального прибутку; • *знаходить* максимальний дохід і максимальний прибуток; еластичність попиту з використанням похідної; • *розв'язує* задачі економічного змісту на знаходження максимальних значень доходу та прибутку, на обчислення граничного доходу, прибутку та витрат і на визначення середніх величин; • *аналізує* зміни доходів залежно від показника еластичності попиту.
5	**Тема 2. Показникова, логарифмічна та степенева функції на прикладі задач з економіки** Розв'язування задач економічного змісту за допомогою показникової функції. Задачі про подвоєння / потроєння грошей. Еквівалентна та ефективна ставки відсотка. Неперервний компаунд.	**Учень (учениця):** • *формулює* означення складного відсотка при неперервному компаунді; еквівалентної та ефективної ставок відсотка; • *обчислює* еквіваленту та ефективну ставки відсотка; • *знаходить* майбутню та поточну вартості складного відсотка; • *розв'язує* задачі на знаходження складного відсотка при неперервному компаунді; • *розв'язує* задачі на знаходження подвоєння / потроєння грошей та в загальному вигляді (для простого та складного відсотків).

Продовження таблиці

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
4	**Тема 3. Елементи теорії імовірностей і математичної статистики в економіці** Математичне сподівання, дисперсія (коефіцієнт ризику). Найпростіші статистичні показники. Застосування елементів теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту.	**Учень (учениця):** • *формулює* означення математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення; • *розв'язує* задачі на обчислення економічного ризику; • *обчислює* математичне сподівання прибутку; • *розуміє* зміст коефіцієнта ризику; • *знаходить* найпростіші статистичні показники (середня арифметична, середня хронологічна, середня гармонічна); • *описує* застосування понять і методів теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту.
7	**Тема 4. Інтеграл та його застосування в економіці** Застосування невизначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту. Застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту. Вигоди споживача та виробника.	**Учень (учениця):** • *наводить приклади* застосування невизначеного і визначеного інтегралів до розв'язування прикладних задач; • *знаходить* площі криволінійних трапецій; • *застосовує* невизначений і визначений інтеграли до розв'язування задач економічного змісту; • *знаходить* вигоди споживачів і виробників.
7	**Тема 5. Рівняння, нерівності та їхні системи в економіці** Модель Леонтьєва (у двo- та тривимірному просторах). Періодичні платежі (ануїтет).	**Учень (учениця):** • *описує* модель Леонтьєва; • *застосовує* системи лінійних рівнянь до розв'язування задач економічного змісту (модель Леонтьєва для дво- і тривимірного просторів); • *формулює* означення періодичного платежу;

Продовження таблиці

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	Амортизація боргу. Викупний фонд.	• *складає* графіки амортизації боргу та викупного фонду; • *володіє* поняттям про різницеві рівняння.
5	Резерв часу і повторення	

Література

1. Іванюта І. Д., Рибалка В. І., Рудоміно-Дусятська І. А. Елементи теорії імовірностей та математична статистика.— К.: Слово, 2003.— 272 с.
2. Книга вчителя математики: Довідково-методичне видання / Упоряд. Н. С. Прокопенко, Н. П. Щекань.– 2-ге вид., доповн.— Х.: Торсінг плюс, 2006.— 288 с.
3. Книга методиста: Довідково-методичне видання / Упоряд. Г. М. Литвиненко, О. М. Вернидуб.— Х.: Торсінг плюс, 2006.— 672 с.
4. Наказ МОНУ від 05.05.2008 р. № 371 «Про критерії оцінювання» [Електронний ресурс] // Сайт МОНУ: http://www.mon.gov.ua.
5. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв економічного профілю. Математика. 10–11 класи / М. А. Вайнтрауб, О. С. Стрельченко, І. Г. Стрельченко // Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків.— К.: Навчальна книга, 2003.— С. 53–70.
6. Математика. Програма для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] // Сайт МОНУ: http://www.mon.gov.ua.
7. Фінансова математика: Навч. посібник / М. А. Вайнтрауб, О. С. Стрельченко, І. Г. Стрельченко.— К.: ТОВ «Арт-програми», 2002.— 120 с.
8. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. закл. освіти.— К.: Освіта, 2000.— 318 с.
9. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закл.— К.: Зодіак-ЕКО, 1996.— 607 с.
10. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. закл. освіти.— К.: Освіта, 2001.— 318 с.

Орієнтовне календарно-тематичне планування

(складено відповідно до програми курсу за вибором для учнів 10–11 класів «Задачі економічного змісту в математиці»)

№ з/п	Тема уроку	Кількість годин
	10 клас	
	Тема 1. Функції, многочлени, рівняння та нерівності в економіці	20
1	Задачі економічного змісту. Модель і математичне моделювання	1
2–4	Математичне моделювання на прикладах задач з економіки	3
5–7	Функції попиту, пропозиції та їх взаємодія. Точка рівноваги	3
8–10	Еластичність та її види	3
11–12	Виручка та еластичність	2
13–16	Ціноутворення та наслідки втручання держави у цей процес	4
17–18	Функції витрат і доходу	2
19–20	Точка беззбитковості	2
	Тема 2. Тригонометричні функції в економіці	5
21–22	Функції витрат і доходу залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги	2
23–25	Функції попиту та пропозиції залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги	3
	Тема 3. Елементи прикладної математики	10
26	Простий відсоток. Поточна та майбутня вартості грошей	1
27–28	Позика	2
29–30	Складний відсоток. Конверсійний період	2
31–32	Простий та складний відсотки	2
33–35	Методи теорії ігор і прийняття рішень	2
	УСЬОГО	35

11 клас

№ з/п	Тема уроку	Кількість годин
	Тема 1. Похідна та її застосування до розв'язування задач економічного змісту	8
1–2	Граничний дохід, граничний прибуток і граничні витрати	2
3–4	Максимальний дохід і максимальний прибуток	2
5–6	Мінімізація витрат	2
7–8	Еластичність попиту	2
	Тема 2. Показникова, логарифмічна та степенева функції на прикладі задач з економіки	6
9	Розв'язування задач економічного змісту за допомогою показникової функції	1
10–11	Задачі про подвоєння / потроєння грошей	2
12	Еквівалентна та ефективна ставки відсотка	1
13–14	Неперервний компаунд	2
	Тема 3. Елементи теорії імовірностей і математичної статистики в економіці	5
15–16	Математичне сподівання, дисперсія (коефіцієнт ризику)	2
17	Найпростіші статистичні показники	1
18	Застосування елементів теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту	1
19	Розв'язування вправ	1
	Тема 4. Інтеграл та його застосування в економіці	8
20–21	Застосування невизначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту	2
22–24	Застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту	3
25–27	Вигоди споживача та виробника	3
	Тема 5. Рівняння, нерівності та їхні системи в економіці	8
28	Модель Леонтьєва (у двовимірному просторі)	1
29	Модель Леонтьєва (у тривимірному просторі)	1
30–31	Періодичні платежі (ануїтет)	2
32–33	Амортизація боргу	2
34–35	Викупний фонд	2
	УСЬОГО	35

10 КЛАС

ТЕМА 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ В ЕКОНОМІЦІ

Заняття 1

Тема. ***Задачі економічного змісту. Модель і математичне моделювання***

Мета: ознайомити учнів із поняттям задачі економічного змісту; повторити поняття математичної моделі, математичного моделювання, етапи математичного моделювання.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: модель, математичне моделювання, етапи розв'язування прикладних задач математичними методами (з курсу алгебри 9 класу).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття задачі

У педагогічній та психологічній літературі немає єдиного трактування поняття «задача». Зокрема, М. А. Данилов розуміє під задачею свідоме багатократне виконання подібних дій з метою оволодіння навичками. З точки зору А. В. Єфремова, задача — це інформаційна сукупність зв'язків і залежностей, виражених словами, за допомогою графіків або в математичних формулах, яка утворює певну ситуацію, що визначає і спонукає розумову діяльність суб'єкта на визначення шляхом упорядкованих дій функціонального виразу невідомих компонентів через відомі.

У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта і тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення зовнішньої ситуації, в якій розглядається діяльність суб'єкта.

У шкільному курсі математики до задач відносять не лише текстові, сюжетні задачі, а й приклади. Задачі є і об'єктом вивчення, і засобом навчання.

Виділяють *чотири основні функції задач*, причому жодна з цих функцій не може виступати ізольовано від інших:

1) навчальна, яка спрямована на формування системи математичних знань учнів, їх умінь і навичок на різних етапах навчання;
2) розвивальна, яка спрямована на розвиток мислення учнів, на формування їхньої розумової діяльності, просторових уявлень, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо;
3) виховна, яка спрямована на формування наукового світогляду учнів, сприяє їхньому економічному й естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, відповідальність та ін.);
4) контролююча, яка спрямована на встановлення рівня загального та математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класу в цілому.

Єдність теорії та практики — це один із основних принципів педагогіки. Зв'язок математики з іншими дисциплінами, зокрема з економікою, є важливим засобом реалізації цього принципу, тому курс математики повинен мати прикладну спрямованість.

Прикладні задачі та їхні види

У методичній літературі подано різні означення прикладної задачі: деякі вчені прикладною називають задачу, яка потребує перекладу на математичну мову; інші вважають, що прикладна задача за формулюванням і методом розв'язування повинна бути близькою до задач, що виникають на практиці. Прикладні задачі — це задачі, фабула яких розкриває застосування математики у суміжних навчальних дисциплінах, знайомить з її використанням в організації, технології та економіці сучасного виробництва, у побуті та сфері обслуговування, при виконанні трудових операцій. У цих задачах задаються реальні умови та розглядаються реальні ситуації, що відбуваються чи можуть відбуватися на практиці. У той же час деякі дослідники ототожнюють прикладні задачі з текстовими.

Отже, вважатимемо, що прикладна задача має задовольняти такі вимоги: бути сюжетною (тобто сформульованою природною мовою, а явища та події повинні бути описані кількісно та якісно); бути моделлю реальної ситуації, що виникає на практиці; має розв'язуватися засобами математики.

Прикладні задачі розрізняють, орієнтуючись на три групи спеціальностей: техніко-технологічні (промисловість, зв'язок, транспорт, будівництво, сільське господарство тощо); гуманітарні (освіта, культура, право, медицина, мистецтво тощо); економічні (фінанси, побут, торгівля тощо).

Сюжетом прикладної задачі є реальна ситуація, яка співвідноситься з однією із трьох груп спеціальностей. Таким чином, можна виділити *три типи прикладних задач*: 1) техніко-технологічні; 2) гуманітарні; 3) економічні.

Задачі економічного змісту — це задачі, пов'язані з фінансами, побутом, торгівлею, грошовими розрахунками, прийняттям оптимальних рішень тощо. Основними видами задач економічного змісту є задачі на відсоткові розрахунки, кредитування, касово-розрахункове обслуговування, оптимізацію, фінансову математику тощо.

Задачі економічного змісту, як і будь-які інші прикладні задачі, складаються з предметного сюжету, умови та вимоги. У предметному сюжеті вказуються (безпосередньо чи опосередковано) економічні поняття та їхні причинно-наслідкові зв'язки в якісній або кількісній інтерпретаціях. До основних економічних понять, що найчастіше використовуються в сюжетних задачах, відносяться: продуктивність праці, собівартість, кредит, курс акцій, рента, бюджетний дефіцит, позичковий відсоток, заробітна плата, амортизаційні відрахування, рентабельність, дохід, витрати, прибуток, окупність та ін. Поняття та зв'язки між ними інтерпретуються для конкретних економічних ситуацій: постановка економічної проблеми, яка пов'язана із необхідністю підвищення прибутку, продуктивності праці, рентабельності, зниження собівартості, із розрахунком ціни ринкової рівноваги, курсу акцій, кількості необхідних для обігу грошей, величини ренти, прибутку банку, сукупних витрат підприємства, прибутку підприємства, податку з доходу; номінального і реального відсотків за кредит, позичкового відсотка із впливом інфляції на заощадження громадян; прийняття оптимального рішення тощо.

Поняття математичної моделі

Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її математичну модель. Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта. *Математичні моделі* створюють із математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів (рівнянь, нерівностей та їхніх систем) тощо. Розв'язування прикладних задач математичними методами здійснюється в *три етапи*:

1) створення математичної моделі даної задачі; 2) розв'язування цієї математичної задачі; 3) аналіз відповіді.

Отже, *модель* — це такий матеріальний або уявний об'єкт, який у процесі дослідження заміщує об'єкт-оригінал.

Поняття математичного моделювання та його етапи

Процес побудови, вивчення та застосування моделей називають *моделюванням*. Необхідність використання методу моделювання визначається тим, що багато об'єктів безпосередньо досліджувати або зовсім неможливо, або ж це дослідження потребує багато часу і засобів.

Можна виділити *три допоміжні етапи* у розв'язуванні задачі: 1) формалізація — перехід від реальної економічної ситуації до побудови формальної економічної моделі; 2) розв'язування задачі всередині побудованої моделі — успішне виконання цього етапу залежить від правильно обраного методу розв'язування та залучення допоміжного математичного апарату; 3) інтерпретація — переклад одержаного результату на мову вихідної задачі.

У загальноосвітній школі увага приділяється в основному роботі над другим етапом моделювання, а перший і третій залишаються розкритими недостатньо. Використання комп'ютерної техніки у школі не знімає зазначеної проблеми, оскільки комп'ютери застосовуються знов-таки до розв'язування задач усередині математичної моделі. Отже, є необхідною організація навчання учнів елементам моделювання, які відносяться до всіх трьох етапів.

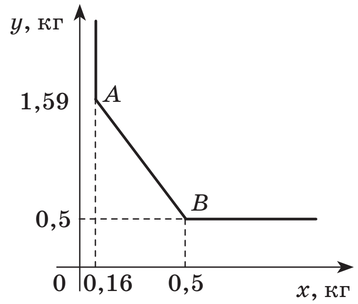
ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача про раціон. Відомо, що 1 кг м'яса містить 140 г білків, 1 кг молока — 30 г білків. Згідно з нормами харчування добова норма білків має становити не менше 70 г. Ціна 1 кг м'яса становить 40 грн, 1 кг молока — 5 грн. Скільки м'яса та молока необхідно споживати щоденно, щоб за мінімальних витрат у раціоні було не менше 160 г м'яса та не менше 500 г молока на день?

Розв'язання

Нехай x — кількість кг м'яса, а y — кількість кг молока. Тоді за умовою задачі складемо такі співвідношення: $0{,}14x+0{,}03y\geqslant 0{,}07$ — раціон містить 70 г білка; $x\geqslant 0{,}16$ — кількість м'яса не менше 0,16 кг; $y\geqslant 0{,}5$ — кількість молока не менше 0,5 кг. Витрати становлять $40x+5y$. Складемо математичну модель даної задачі: необхідно визначити найменше значення

цільової функції $z=40x-5y$, якщо x і y задовольняють умови:
$$\begin{cases}0{,}14x+0{,}03y\geqslant 0{,}07,\\ x\geqslant 0{,}16,\\ y\geqslant 0{,}5.\end{cases}$$



При обмеженнях, установлених вище, необхідно визначити мінімальне значення цільової функції z (див. рисунок). Отже, у денний раціон необхідно включити 0,16 кг м'яса та 1,59 кг молока. При цьому $z(A)=14{,}35$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити конспект заняття.

Заняття 2

Тема. ***Математичне моделювання на прикладах задач з економіки***

Мета: формувати вміння застосовувати методи та підходи математики в економіці; ознайомити учнів із прикладами математичного моделювання.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: модель, математичне моделювання, етапи розв'язування задачі.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Перед розв'язуванням задач наведемо умовні позначення одиниць вимірювання, які надалі будемо використовувати у текстах задач: од. — одиниця — одиниця кількості (товару, продукції, послуг тощо); гр. од. / у. о. — грошова одиниця / умовна одиниця — будь-яка валюта у певній кількості.

Задача про раціональний розкрій матеріалу. Припустимо, що ЗАТ «Шиття» випускає два види продукції (A і B). Для виготовлення 1 од. виробу A потрібно витратити 2 м тканини 1-го типу, 3 м тканини 2-го типу та 1 м тканини 3-го типу, для

виготовлення 1 од. виробу B — ті самі тканини із витратами відповідно 1 м, 4 м і 3 м. Виробництво забезпечено сировиною кожного типу у кількості 400 м, 900 м і 600 м відповідно. Вартість виробу A становить 60 грн, а виробу B — 40 грн. Складіть план виробництва виробів A і B, який забезпечить максимальний прибуток від реалізації.

Розв'язання

Докладно розглянемо всі три етапи розв'язання задачі.

1) Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1 — кількість виробів A, E_2 — кількість виробів B, які сплановано до виробництва ($E_1\geqslant 0$; $E_2\geqslant 0$). Тоді тканини 1-го типу потрібно буде витратити $2x_1$ м на виріб A і x_2 м на виріб B; увесь запас тканини 1-го типу дорівнює 400 м, тобто $2x_1+x_2\leqslant 400$; аналогічно для 2-го типу тканини: $3x_1+4x_2\leqslant 900$; для 3-го типу тканини: $x_1+3x_2\leqslant 600$. Після реалізації виробів буде одержано $(60x_1+40x_2)$ грн.

Таким чином, потрібно знайти такі x_1 і x_2, щоб виконувались умови:
$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 400,\\ 3x_1+4x_2\leqslant 900,\\ x_1+3x_2\leqslant 600,\\ x_1\geqslant 0,\\ x_2\geqslant 0,\\ F=60x_1+40x_2\to\max.\end{cases}\qquad (1)$$

Функція F — цільова функція, x_1 і x_2 — її аргументи, система (1) — обмеження, які описують умови виробництва.

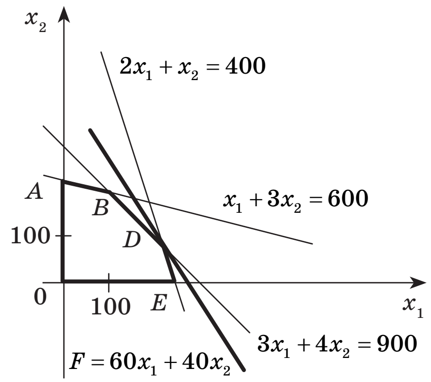
Крім того, відповідно до умови лінійна функція $F=60x_1+40x_2$ повинна мати найбільше значення.

Отже, задача полягає в тому, щоб знайти множину розв'язків системи (1) і з неї обрати ті, за яких значення функції F буде найбільшим.

2) На другому етапі розв'язання задачі (усередині моделі) можуть бути застосовані як геометричний метод розв'язування (розглядається у загальноосвітніх навчальних закладах), так і симплекс-метод (розглядається у вищих навчальних закладах).

Застосуємо геометричний метод розв'язування даної задачі.

Множиною розв'язків кожної нерівності системи (1) є півплощина; областю розв'язків даної системи нерівностей є переріз цих півплощин. На рисунку таким перерізом є многокутник $OABDE$.



Найбільшого значення функція $F = 60x_1 + 40x_2$ набуває в одній з вершин цього многокутника: $O(0; 0)$, $A(0; 200)$, $B(60; 180)$, $D(140; 120)$, $E(200; 0)$, тому що функція F приймає значення, яке дорівнює c, для всіх пар $(x; y)$ таких, що $60x_1 + 40x_2 = c$. На координатній площині x_1Ox_2 ці точки належатимуть прямій $60x_1 + 40x_2 = c$. Будемо надавати довільні значення c, при цьому отримаємо різні прямі, які будуть паралельні, оскільки матимуть однаковий кутовий коефіцієнт. Якщо ці прямі будуть проходити через внутрішні точки многокутника $OABDE$, то при цьому функція F не набуватиме ані найменшого, ані найбільшого значення. Отже, залишаються прямі, які перетинають многокутник $OABDE$ тільки по його межі. Таким чином, найбільшого значення функція $F = 60x_1 + 40x_2$ набуває у вершині $D(140; 120)$ многокутника:

$$F(140; 120) = 60x_1 + 40x_2 = 60 \cdot 140 + 40 \cdot 120 = 13\,200.$$

Звідси одержимо, що $x_1 = 140$; $x_2 = 120$.

3) На третьому етапі розв'язування задачі переведемо одержані результати на мову умови задачі та отримаємо, що оптимальним розв'язком буде виготовлення 140 одиниць виробу A і 120 одиниць виробу B; обчислимо максимальний прибуток: $F = 60 \cdot 140 + 40 \cdot 120 = 13\,200$ (грн).

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити конспект заняття.

Скласти 2–3 задачі економічного змісту та розв'язати їх засобами математики (у вигляді реферату).

Заняття 3

Тема. ***Математичне моделювання на прикладах задач з економіки***

Мета: ознайомити учнів з окремими можливими способами застосування математичних моделей в економіці.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: етапи складання математичної моделі.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Для виготовлення виробів A і B підприємство використовує три види сировини (I, II, III). Прибуток від реалізації 1 од. виробу A дорівнює 30 грн, 1 од. виробу B – 40 грн. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення 1 од. певної продукції та загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведено у табл. 1. Складіть план випуску виробів A і B, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним. Ураховуйте те, що підприємство може виготовляти такі вироби у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений).

Таблиця 1

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 од. виробу		Загальна кількість сировини
	A	*B*	
I	3	1	75
II	1	1	30
III	1	4	84

Розв'язання

Нехай x — кількість виробів A, y — кількість виробів B.

Ураховуючи, що виробництво продукції обмежене кількістю сировини кожного виду, яка є на підприємстві, і що кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, складемо систему нерівностей: $\begin{cases} 3x + y \leqslant 75, \\ x + y \leqslant 30, \\ x + 4y \leqslant 84, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Знайдемо загальний прибуток від реалізації виробів A і виробів B: $F=30x+40y$. Тобто серед невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей необхідно знайти такий, при якому функція F набуватиме максимального значення.

Відобразимо в одній системі координат умови системи нерівностей. Множина всіх точок замкненого многокутника $OABCD$ задовольняє всі нерівності системи (рис. 1).

Щоб знайти точку, у якій функція F досягає свого максимального значення, побудуємо вектор $\overline{C}=(30;40)$ і пряму $30x+40y=c$. Надаючи c різні значення, побудуємо різні паралельні прямі. Припустимо, що $c=480$. Побудуємо $30x+40y=480$ та будемо рухати цю пряму у напрямку вектора $\overline{C}$. Із рис. 1 видно, що останньою спільною точкою прямої та п'ятикутника є точка B.

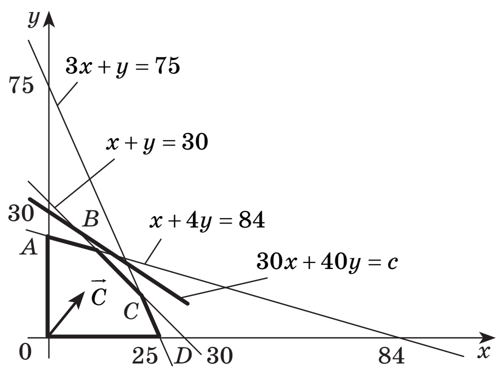


Рис. 1

Координати точки B знаходимо із системи: $\begin{cases} x+y=30, \\ x+4y=84. \end{cases}$

Звідси $B(12;18)$. Отже, якщо підприємство вироблятиме 12 од. виробу A і 18 од. виробу B, то воно отримає максимальний прибуток: $F_{\max}=30\cdot12+40\cdot18=1080$ (грн).

Задача 2. Раціон тварин складається із двох видів корму — сіна та концентратів. У табл. 2 подано числові дані про собівартість кормів у господарстві (у грн). Добова потреба кормів на одну тварину — 20 од. Знайдіть найдешевший щоденний раціон, якщо для сільськогосподарських тварин він повинен включати не менше 16 кг сіна.

Таблиця 2

Вид корму	**Вміст кормових одиниць на 1 кг кормів**	**Собівартість кормів (грн)**
Сіно	0,5	1,5
Концентрати	1,0	2,5

Розв'язання

Нехай x — кількість кг сіна, y — кількість кг концентратів. Ураховуючи умову задачі та дані табл. 2, запишемо співвідношення: $0,5x+y=20$ — щоденна потреба у кормах на одну тварину; $x\geqslant16$ — щоденна потреба у кормах не менше 16 кг сіна; $y>0$ — кількість концентратів не може бути від'ємною.

Цільова функція z (функція, мінімум чи максимум якої треба знайти): $z=1,5x+2,5y$.

Побудуємо графік (рис. 2)

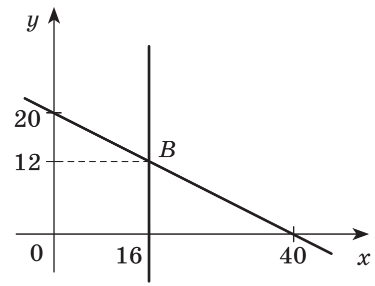


Рис. 2

Необхідно визначити мінімальне значення цільової функції при обмеженнях, встановлених вище:

$$\begin{cases} 0,5x+y=20, \\ x\geqslant16, \\ y>0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо найбільш економний щоденний раціон для однієї тварини: $(16;12)$. При цьому $z(B)=54$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити конспект заняття.
Повторити етапи складання математичної моделі.

Заняття 4

Тема. **Математичне моделювання на прикладах задач з економіки**

Мета: ознайомити учнів з окремими можливими способами застосування математичних моделей в економіці.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: етапи складання математичної моделі.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача. У цеху виготовляють два види виробів (1 і 2) на чотирьох дільницях (I–IV). Прибуток від реалізації одного виробу виду 1 становить 3 грн, одного виробу виду 2 дорівнює 4 грн. Час роботи на дільниці I не перевищує 16 годин, на дільниці II — 30 годин, на дільниці III — 16 годин, а на дільниці IV — 12 годин. Кількість виробів, яку виготовляють на кожній дільниці, та час, потрібний для виготовлення виробів на кожній дільниці, подано у таблиці. Складіть план випуску виробів виду 1 і виду 2, щоб мати значення максимального прибутку від реалізації цих виробів.

Дільниця	Виріб		Час, необхідний для виготовлення одного виробу (год)
	1	2	
I	4	2	16
II	3	6	30
III	0	4	16
IV	2	0	12

Розв'язання

Нехай x_1 — число виробів виду 1, x_2 — число виробів виду 2.

На дільниці I витрачають $4x_1$ год на виготовлення виробу виду 1 і $2x_2$ год на виготовлення виробу виду 2, тобто разом $(4x_1+2x_2)$ год. Оскільки час роботи на дільниці I не перевищує 16 год, то $4x_1+2x_2 \leqslant 16$.

На дільниці II витрачають $3x_1$ год на виготовлення виробів виду 1 і $6x_2$ год на виготовлення виробів виду 2, разом не більше 30 год, звідси $3x_1+6x_2 \leqslant 30$.

На дільниці III вироби виду 1 не виготовляють (тобто витрачають на це 0 год), а виготовлення виробів виду 2 займає $4x_2$ год, звідси $4x_2 \leqslant 16$.

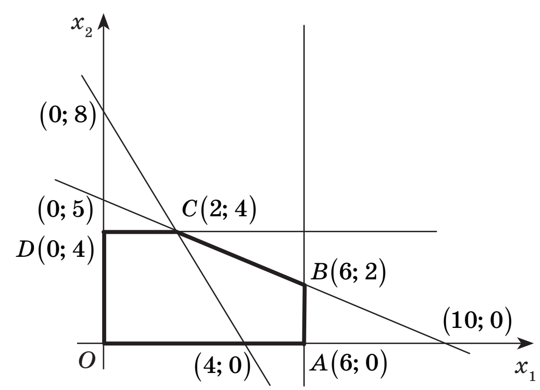
На дільниці IV витрачають $2x_1$ год на вироби виду 1, а вироби виду 2 не виготовляють, звідси $2x_1 \leqslant 12$.

Від реалізації x_1 виробів виду 1 цеху нараховується $3x_1$ грн прибутку і від реалізації x_2 виробів виду 2 — $4x_2$ грн прибутку. Загальний прибуток цеху становить $(3x_1+4x_2)$ грн, де $x_1 \geqslant 0$ і $x_2 \geqslant 0$.

Математична модель задачі описується системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 \leqslant 16, \\ 3x_1+6x_2 \leqslant 30, \\ 4x_2 \leqslant 16, \\ 2x_1 \leqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Із множини розв'язків цієї системи нерівностей треба знайти найбільше значення лінійної функції $z=3x_1+4x_2$. Тобто математична задача звелась до знаходження максимального значення функції $z=3x_1+4x_2$. Побудуємо графік (див. рисунок).



Побудувавши прямі $4x_1+2x_2=16$, $3x_1+6x_2=30$, $4x_2=16$, $2x_1=12$, одержимо многокутник *OABCD*. Усередині цього многокутника функція максимуму не досягає, бо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$

і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ не дорівнюють нулю, а на сторонах многокутника функція монотонна. Тому функція має найбільше значення у вершинах многокутника $OABCD$.

Звідси $A(6;0)$; $B(6;2)$; $C(2;4)$; $D(0;4)$. Визначимо значення функції в цих точках: $z(A)=18$; $z(B)=26$; $z(C)=22$; $z(D)=16$.

У точці $B(6;2)$ лінійна форма досягає максимуму.

Отже, найбільший прибуток від реалізації двох видів виробів становить 26 грн. Його буде досягнуто, якщо цех виготовить 6 виробів виду 1 і 2 вироби виду 2.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Вивчити конспект заняття.

Повторити вузлові питання занять 1–4.

Заняття 5

Тема. ***Функції попиту, пропозиції та їхня взаємодія***

Мета: ознайомити учнів з поняттями попиту та пропозиції, графіками, характером та особливостями поведінки функцій попиту та пропозиції; сформулювати закони попиту та пропозиції.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: функція, способи задання функції (з курсу алгебри 8 класу).

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Економічні процеси можна проілюструвати за допомогою найбільш відомих функцій. Зокрема, у класах економічного профілю вчителю необхідно звернути увагу учнів на основні поняття економічної теорії з математичної точки зору (попит, пропозиція, рівноважна ціна, еластичність, дохід, прибуток тощо). У загальноосвітніх навчальних закладах цей навчальний матеріал можна розглянути на позакласних заняттях з метою виявлення міжпредметних зв'язків.

Наведемо приклади застосування математики в економіці. Відомо, що мікроекономіка є однією зі складових сучасної фундаментальної науки про господарство. Вона займається аналізом діяльності окремих ланок господарчої системи (фірм, підприємств, ринків конкретних видів товарів та послуг тощо). Найважливіше питання мікроекономіки полягає у вивченні взаємозв'язку попиту та пропозиції.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття попиту

Попит (D) — це зумовлене платоспроможністю бажання покупців придбати товари (послуги) за даних умов. Попит показує залежність між кількістю товару, який купують протягом певного проміжку часу, і ціною даного товару. За умови, що всі фактори, крім ціни товару, зафіксовані матимемо залежність, яку називають *функцією попиту від ціни*:

$$Q_D = f(P),$$

де Q_D — обсяг попиту на даний товар; P — ціна даного товару.

Графік функції попиту

Графічним зображенням функції попиту є крива попиту (рис. 1). Ця крива є спадною функцією, тобто якщо ціна на якийсь товар підвищується, то кількість проданого товару буде зменшуватись. Саме тому можемо сформулювати *закон попиту*: зі зростанням ціни обсяг попиту скорочується, і навпаки.

В економічній теорії прийнято відкладати ціну (P — незалежна змінна) по осі ординат, а обсяг попиту (Q_D) або інші параметри (залежні від ціни) — по осі абсцис. З точки зору математики необхідно було б зробити навпаки: незалежну змінну відкладати по осі абсцис, а залежну — по осі ординат.

При розв'язуванні задач використовують лінійну функцію попиту (рис. 2), яка описується рівнянням: $Q_D = a - bP$, де a і b — сталі величини.

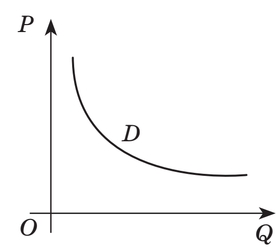


Рис. 1

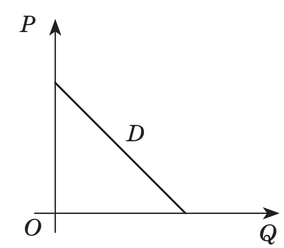


Рис. 2

Слід розрізняти попит та обсяг попиту. Обсяг попиту є складовою частиною попиту, його основною характеристикою.

На величину попиту впливають такі нецінові фактори:
1) зміна доходів населення;
2) зміна кількості споживачів під впливом демографічних і міграційних чинників, зміна структури населення тощо;
3) зміна споживчих смаків;
4) зміна цін на інші товари, що пов'язані з даним товаром (товари-замінники, доповнюючи товари).

Поняття пропозиції

Пропозиція (S) — це кількість товарів, яку виробник (продавець) готовий продати за певною ціною у визначений проміжок часу. За умови, що всі чинники, крім ціни даного товару, зафіксовані, матимемо функцію пропозиції від ціни:

$$Q_S = f(P),$$

де Q_S — обсяг пропозиції даного товару; P — ціна товару.

Графік функції пропозиції

Графічним зображенням функції пропозиції є крива пропозиції (рис. 3), яка у більшості випадків є зростаючою. Звідси випливає закон пропозиції: із підвищенням ціни обсяг пропозиції зростає, і навпаки.

При розв'язуванні задач використовують лінійну функцію пропозиції (рис. 4), яка описується рівнянням: $Q_S = c + dP$, де c і d — сталі величини.

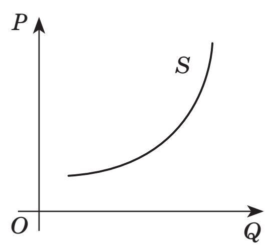


Рис. 3

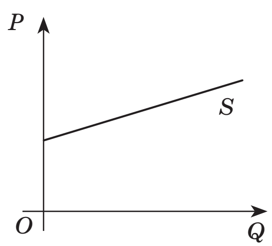


Рис. 4

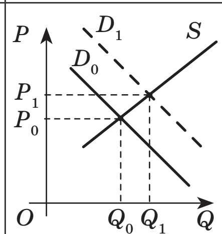
Слід розрізняти пропозицію та обсяг пропозиції. Пропозиція — це множина співвідношень цін і відповідних кількостей товару, а обсяг пропозиції — це конкретна кількість товару, яку продавці бажають та можуть продати на ринку за деякий період часу за певною ціною.

На величину пропозиції впливають такі нецінові фактори:
1) витрати виробництва, які охоплюють як технології виробництва, що визначають необхідні кількості використовуваних ресурсів, так і ціни цих ресурсів;
2) введення податків і субсидій;
3) наявність і відсутність конкурентів на ринку певного товару;
4) зміна цін на інші товари (перелив ресурсів з однієї галузі в іншу);
5) природні катастрофи, екологічні катаклізми, певні політичні події, війни.

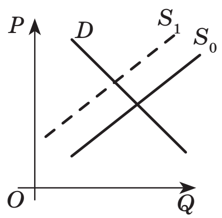
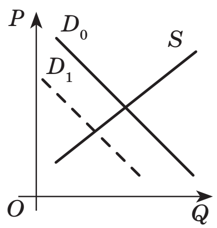
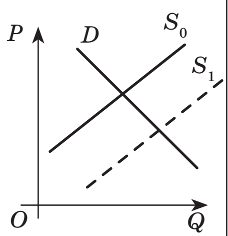
ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо, як впливають нецінові фактори на графіки попиту та пропозиції (зсувають ці графіки ліворуч або праворуч). Зсув графіків відбувається лише у випадку зміни попиту (пропозиції). Коли йдеться про те, що змінюється величина попиту або величина пропозиції, це означає, що точка рухається по кривій попиту або пропозиції, тобто зсуву кривих не відбувається.

Щоб визначити вплив певної економічної події на ринок конкретного товару, потрібно встановити, чи існує взаємозалежність між подією та товаром, і якщо так, то яка саме (товари-замінники, доповнювальні товари); визначити, ціновий чи неціновий фактор здійснив вплив на ринок цього товару (якщо неціновий фактор, то визначити, який це фактор — попиту або пропозиції); побудувати графіки попиту та пропозиції до та після впливу на ринок товару; проаналізувати зміну ціни й обсягу попиту та пропозиції.

Ринок товару	**Подія**	**Графік зміни попиту (D) або пропозиції (S)**	**Взаємозалежність зміни ціни (P) та обсягу (Q) товару**	**Фактор, що викликав зміну попиту (D) або пропозиції (S)**
Мінеральна вода	Відбулося значне підвищення ціни на натуральні соки		Соки та мінеральна вода — товари-замінники. Зростання ціни на соки спричинить зростання попиту на мінеральну воду $P\uparrow Q\uparrow$	Неціновий фактор попиту: зміна ціни товару-замінника

Продовження таблиці

Ринок товару	Подія	Графік зміни попиту (D) або пропозиції (S)	Взаємозалежність зміни ціни (P) та обсягу (Q) товару	Фактор, що викликав зміну попиту (D) або пропозиції (S)
Мед	Даного сезону значна частина бджіл загинула		Бджоли виробляють мед, тому відбудеться зміна кількості сировини $P\uparrow Q\downarrow$	Неціновий фактор пропозиції: витрати виробництва
Одяг спортивного стилю	Даного сезону модно носити класичний одяг		Одяг спортивного стилю та класичний одяг — товари-замінники $P\downarrow Q\downarrow$	Неціновий фактор попиту: зміна смаків споживачів
Цукерки	Даного року був дуже високий врожай цукрового буряку		Із цукрового буряку виробляють цукор, який, в свою чергу, є складовою цукерок. Отже, відбудеться зміна кількості сировини $P\downarrow Q\uparrow$	Неціновий фактор пропозиції: витрати виробництва

Заняття 6–7

Тема. ***Функції попиту, пропозиції та їх взаємодія. Точка рівноваги***

Мета: ознайомити учнів із дією ринкового механізму; формувати вміння визначати точку рівноваги графічно й аналітично; формувати уявлення про залежність між кількістю покупців (продавців) та рівноважною ціною; навчити встановлювати цю залежність.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: попит, пропозиція, закон попиту, закон пропозиції.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Точка рівноваги

У мікроекономіці інтерес становить точка перетину кривих попиту та пропозиції. Цю точку називають *точкою рівноваги* (P_0, Q_0), а відповідну їй ціну — *рівноважною ціною*. Рівновага на ринку встановлюється, коли збігаються обсяг попиту (Q_D) та обсяг пропозиції (Q_S): $Q_D = Q_S$.

Якщо $P_1 > P_0$, то кількість товару Q_{S_1}, яка відповідає пропозиції, більша за кількість товару Q_{D_1}, яка відповідає попиту, тобто обсяг пропозиції перевищує обсяг попиту. Наслідком цього буде утворення на ринку надлишку товару (рис. 1).

Якщо $P_1 < P_0$, то кількість товару Q_{S_2} менша за кількість товару Q_{D_2}, тобто обсяг попиту перевищує обсяг пропозиції. Наслідком цього є утворення на ринку дефіциту (рис. 2).

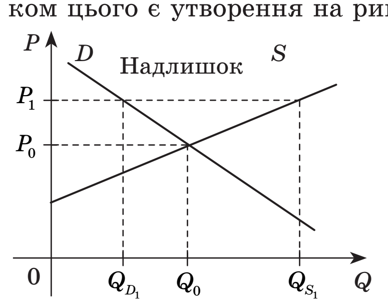


Рис. 1

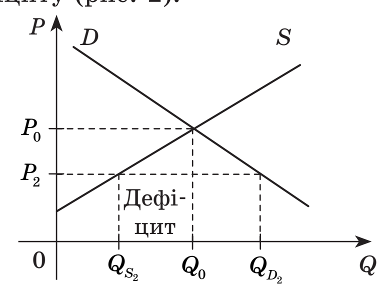


Рис. 2

Часто лінійного наближення функцій попиту та пропозиції недостатньо для розв'язування задач. Іноді кращим наближенням є квадратичне, тобто подання функцій попиту та пропозиції за допомогою квадратичних функцій. Припустимо, що крива пропозиції має вигляд: $P = a_S Q^2 + b_S Q + c_S$, де P — ціна; Q — кількість запропонованого на ринку товару; a_S, b_S, c_S — параметри квадратичної функції, які зазвичай знаходяться емпірично.

Реальний економічний зміст крива пропозиції має лише для значень $P > 0$, $Q > 0$ (позитивні значення ціни та обсягу товару), хоча квадратична функція визначена на всій числовій осі. Як зазначалося раніше, крива пропозиції є зростаючою функцією. Звідси випливає, що параметр $a_S > 0$ і вітки параболи напрямлені вгору. Схематично криву пропозиції подано на рис. 3, причому ту частину графіка, яка має економічний зміст, зображено суцільною лінією.

Припустимо, що крива попиту, як і крива пропозиції, може мати вигляд квадратичної функції: $P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D$, де P — ціна; Q — кількість товару; a_D, b_D, c_D — параметри квадратичної функції (рис. 4). Так само, як і в попередньому графіку, суцільною лінією позначено ту частину графіка квадратичної функції, яка має економічний зміст (тобто відповідає додатним значенням ціни P і кількості товару Q). Крива попиту є спадною функцією (чим вище ціна, тим менше товару можна купити за цією ціною). Із цього випливає, що вітки параболи напрямлені вниз, тобто $a_D < 0$.

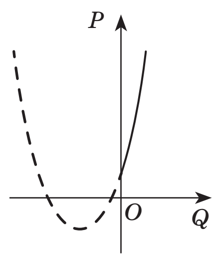


Рис. 3

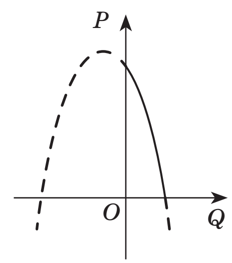


Рис. 4

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Знайдемо точку рівноваги для нелінійних функцій графічно та аналітично.

Щоб знайти точку рівноваги *графічно*, достатньо криві попиту та пропозиції побудувати в одній системі координат (рис. 5). Суцільною лінією зображена та частина графіка, яка має економічний зміст. Точка $(P_1; Q_1)$ і є точкою рівноваги. Отже, рівновага на ринку встановлюється тоді, коли обсяг пропозиції збігається з обсягом попиту. Точка перетину двох кривих, нанесених пунктиром, реального економічного змісту не має, оскільки знаходиться в області від'ємних значень обсягу товару.

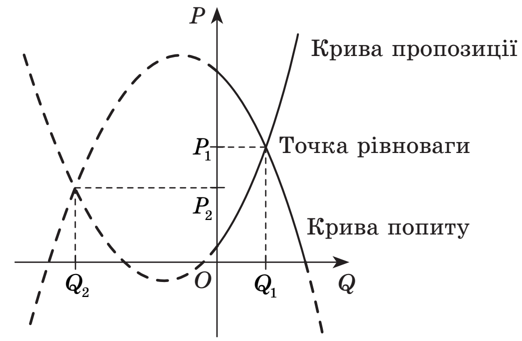


Рис. 5

Розглянемо *алгебраїчний* метод знаходження рівноважної ціни. Складемо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} P = a_S Q^2 + b_S Q + c_S, \\ P = a_D Q^2 + b_D Q + c_D. \end{cases}$$

Прирівняємо праві частини рівнянь, згрупуємо члени рівняння: $(a_S - a_D)Q^2 + (b_S - b_D)Q + (c_S - c_D) = 0$. Позначивши: $a = a_S - a_D$, $b = b_S - b_D$, $c = c_S - c_D$, одержимо рівняння: $aQ^2 + bQ + c = 0$.

Отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два корені:

$$Q_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad Q_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корінь Q_2 — від'ємний (див. рис. 5), тому він відкидається.

Щоб знайти рівноважну ціну P, необхідно підставити кількість обсягу товару Q_1 у функцію попиту або пропозиції.

Графічний та алгебраїчний методи повинні дати однаковий результат.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Функція попиту на яловичину задано рівнянням $Q_D = 30 - P$, де Q_D — величина попиту на яловичину на день (у кг); P — ціна за 1 кг (у гр. од.). Функцію пропозиції задано рівнянням $Q_S = 15 + 2P$, де Q_S — величина пропозиції на день (у кг). Опишіть ситуацію, яка виникне на ринку м'яса, якщо ціну на ринку встановлять на рівні 3 гр. од. за 1 кг. Задачу розв'яжіть аналітично.

Розв'язання

Знайдемо параметри рівноваги (рівноважну ціну та обсяг товару): $Q_D = Q_S$; $30 - P = 15 + 2P$; $P = 5$ гр. од. Тоді $Q = 30 - 2 = 25$ (кг). Розглянемо ситуацію, коли на ринку буде встановлено ціну на рівні 3 гр. од. за 1 кг. Встановлена ціна нижча за рівноважну $(3 < 5)$, отже, на ринку виникне дефіцит яловичини.

Задача 2. Попит на товар задано рівнянням $Q_D = 10 - P$, а пропозицію — рівнянням $Q_S = -8 + 2P$. Визначте рівноважну ціну та рівноважну кількість продажу. Відповідь підтвердіть графічно. Що станеться на ринку, якщо держава встановить ціну на даний товар 5 грн за 1 од.? виробники продаватимуть даний товар по 7 грн за 1 од.?

Розв'язання

Ринкова ціна встановлюється у точці рівноваги, коли величина попиту дорівнює величині пропозиції. Щоб знайти точку рівноваги, необхідно прирівняти праві частини рівняння попиту і рівняння пропозиції: $10 - P = -8 + 2P$; $3P = 18$; $P = 6$.

Отже, рівноважна ціна дорівнює 6 грн. Визначимо рівноважну кількість продажу: $Q = 10 - P = 4$ (од.)

Побудуємо графік (рис. 6).

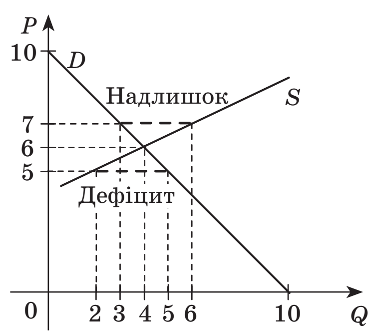


Рис. 6

Якщо держава встановлює ціну, яка дорівнює 5 грн за одиницю товару, то вона менша за ринкову, тобто $Q_D > Q_S$, отже,

величина попиту перевищує величину пропозиції, що приведе до виникнення дефіциту в розмірі: $Q_D(5) - Q_S(5) = 5 - 2 = 3$ (од.)

Ціна 7 грн — вища за рівноважну: $Q_S > Q_D$ (за умовою). Тоді $Q_S(7) - Q_D(7) = 6 - 3 = 3$ (од.). Отже, виникне надлишок.

Задача 3. За ціною 2 у. о. обсяг попиту дорівнює 6 од., а за ціною 4 у. о. — 2 од. Функція попиту лінійна. Запишіть функцію попиту. Знайдіть максимальну ціну попиту.

Розв'язання

Загальний вигляд лінійної функції попиту: $Q_D = a - bP$, де a і b — сталі величини. За умовою задачі: $\begin{cases} 6 = a - 2b, \\ 2 = a - 4b. \end{cases}$ Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: $a = 10$; $b = 2$. Тоді функція попиту матиме вигляд: $Q_D = 10 - 2P$.

За умови максимальної ціни попиту величина попиту дорівнює нулю: $10 - 2P = 0$; $P = 5$. Отже, максимальна ціна попиту становить 5 у. о.

Задача 4. За ціною 6 у. о. величина пропозиції дорівнює 5 од., а за ціною 10 у. о. величина пропозиції становить 15 од. Функція пропозиції лінійна. Знайдіть мінімальну ціну пропозиції. Запишіть функцію пропозиції.

Розв'язання

Загальний вигляд лінійної функції пропозиції: $Q_S = c + dP$, де c і d — сталі величини. За умовою задачі: $\begin{cases} 5 = c + 6d, \\ 15 = c + 10d. \end{cases}$ Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: $c = -10$; $d = 2{,}5$. Тоді функція пропозиції матиме вигляд: $Q_S = -10 + 2{,}5P$.

За умови мінімальної ціни пропозиції величина пропозиції дорівнює нулю: $-10 + 2{,}5P = 0$; $P = 4$. Отже, мінімальна ціна пропозиції становить 4 у. о.

Задача 5. Функція попиту має вигляд $Q_D = -9000 \cdot P + 10\,500$, а функція пропозиції — вигляд $Q_S = 1500 \cdot P$. Визначте нові параметри рівноваги, якщо пропозиція послуг перевізників змінилася на 50 % унаслідок зростання цін на пальне. Опишіть ситуацію на ринку, якщо держава встановила ціну за проїзд на рівні 1 грн.

Розв'язання

Зростання цін на ресурси є нецiновим фактором пропозиції, тому функція пропозиції зміниться. Вона матиме вигляд:

$Q_{S_1}=0,5\cdot Q_S$; $Q_{S_1}=0,5\cdot 1500\cdot P$; $Q_{S_1}=750\cdot P$. Нові параметри рівноваги: $Q_D=Q_{S_1}$; $10\,500-9000\cdot P=750\cdot P$; $10\,500=9750\cdot P$; $P\approx 1,077$ грн. Звідси $Q_{S_1}=750\cdot 1,077\approx 808$ або $Q_D=10\,500-9000\cdot 1,077\approx 808$. Якщо держава встановить ціну на рівні 1 грн за проїзд, отримаємо: $Q_D(1)=10\,500-9000\cdot 1=1500$; $Q_{S_1}(1)=750\cdot 1=750$.

Оскільки $Q_D>Q_{S_1}$, то на ринку виникне дефіцит у розмірі: $1500-750=750$ (поїздок).

Заняття 8

Тема. ***Еластичність та її види***

Мета: ознайомити учнів із поняттям еластичності попиту, формулами обчислення величини еластичності попиту та пропозиції.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: попит, пропозиція, ціна товару, обсяг товару.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття еластичності

Еластичність (E) — це міра чутливості функціонально пов'язаних величин. Еластичність визначається як співвідношення відсоткових змін залежної і незалежної змінних.

Розрізняють еластичність попиту та еластичність пропозиції.

Еластичність попиту

Види еластичності попиту:

1) еластичність попиту за ціною (E_D);
2) перехресна еластичність попиту (E_{XY});
3) еластичність попиту за доходом (E_I).

Еластичність попиту за ціною — це відсоткова зміна обсягу попиту на один товар при зміні на 1 % ціни *даного товару*:

$$E_D=\frac{\Delta Q\ \%}{\Delta P\ \%},\ \text{або}\ E_D=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_1}{Q_1},$$

де ΔQ і ΔP — зміна попиту та зміна ціни відповідно; P_1 і Q_1 — значення ціни та обсягу попиту відповідно. Еластичність попиту в точці $(P_1;\ Q_1)$ називають *точковою еластичністю*.

Часто E_D має від'ємне значення, яке при визначенні еластичності не враховується. Якщо розв'язати рівняння попиту відносно осі абсцис, одержимо: $-b=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\to E_D=-b\frac{P}{Q}$, де $-b$ — кутовий коефіцієнт прямої.

Показник дугової еластичності застосовується для вимірювання еластичності попиту в центральній точці інтервалу на певному відрізку кривої попиту і розраховується за середніми величинами ціни та обсягу:

$$\bar{E}_D=\frac{(Q_2-Q_1):(Q_1+Q_2)}{(P_2-P_1):(P_1+P_2)},\ \text{або}\ \bar{E}_D=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}.$$

Розрізняють такі види цінової еластичності попиту (рис. 1):

$|E_D|>1$ — еластичний попит;

$|E_D|<1$ — нееластичний попит;

$|E_D|=1$ — одинично еластичний попит (нормальні товари, або товари, які мають багато замінників);

$|E_D|=\infty$ — абсолютно еластичний попит;

$|E_D|=0$ — абсолютно нееластичний попит.

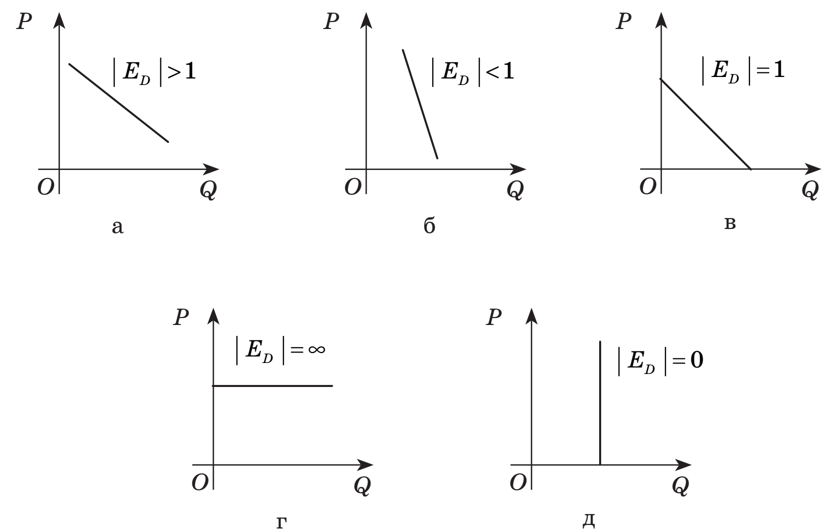


Рис. 1. Види цінової еластичності попиту: *а* — еластичний; *б* — нееластичний ; *в* — одинично еластичний; *г* — абсолютно еластичний; *д* — абсолютно нееластичний

Перехресна еластичність попиту — це відсоткова зміна обсягу попиту на один товар при зміні на 1 % *ціни іншого товару*:

$$E_{XY} = \frac{\Delta Q_X\ \%}{\Delta P_Y\ \%}, \text{ або } E_{XY} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X}.$$

$E_{XY} > 0$ — товари-субститути (товари-замінники);

$E_{XY} < 0$ — товари-комплементи (доповнювальні товари).

Еластичність попиту за доходом — це відсоткова зміна обсягу попиту на один товар при зміні на 1 % *доходу*:

$$E_I = \frac{\Delta Q\ \%}{\Delta I\ \%}, \text{ або } E_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \frac{I}{Q}.$$

$E_I > 0$ — нормальні блага (товари, у яких багато замінників);

$E_I < 0$ — нижчі за норму товари (ті, у яких небагато / немає замінників);

$E_I = 0$ — нейтральні товари;

$0 < E_I < 1$ — товари першої необхідності.

Еластичність пропозиції

Еластичність пропозиції характеризує чутливість продавців до зміни ціни продукції.

Цінова еластичність пропозиції — це відсоткова зміна обсягу пропозиції на один товар при зміні на 1 % *ціни даного товару*:

$$E_S = \frac{\Delta Q_S\ \%}{\Delta P\ \%} = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S}, \text{ або } E_S = d\frac{P}{Q},$$

де d — коефіцієнт, який визначає кут нахилу кривої пропозиції.

Коефіцієнт цінової еластичності пропозиції розраховується за такими самими формулами, що й коефіцієнт цінової еластичності попиту, тільки замість величини попиту беруть величину пропозиції.

Оскільки крива пропозиції має позитивний нахил, то значення коефіцієнта еластичності пропозиції завжди є додатним (зміни ціни та обсягів пропозиції відбуваються в одному напрямку).

Основним фактором, що впливає на еластичність пропозиції за ціною, є кількість часу, яку має виробник для реагування на конкретну зміну ціни товару. Можна сподіватись, що чим більше часу має виробник для пристосування до певної зміни ціни, тим більше зміниться обсяг продукції і тим більшою буде еластичність пропозиції.

Аналізуючи вплив часу на еластичність пропозиції (рис. 2), економісти розрізняють найкоротший ринковий період, короткостроковий і довгостроковий ринкові періоди. *Найкоротший ринковий період* настільки короткочасний, що виробники не можуть відреагувати на зміни величин попиту та ціни, тобто крива пропозиції буде повністю нееластичною (рис. 2, *д*). У *короткостроковому ринковому періоді* виробничі потужності індивідуальних виробників і всієї галузі залишаються незмінними (рис. 2, *в*). Проте виробники уже мають час для більш або менш інтенсивного використання своїх потужностей за рахунок варіювання кількістю використовуваних змінних факторів виробництва. При цьому еластичність пропозиції буде вищою, ніж у попередньому випадку, тобто крива пропозиції матиме додатний нахил (рис. 2, *а*). У *довгостроковому ринковому періоді*, коли є можливість змінювати кількість абсолютно всіх ресурсів, цінова еластичність пропозиції буде найвищою (рис. 2, *г*).

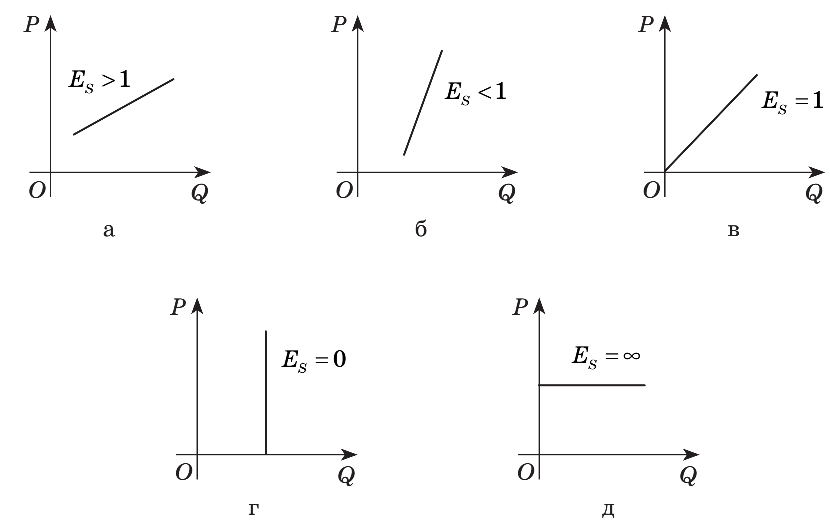


Рис. 2. Види цінової еластичності пропозиції: *а* — еластична; *б* — нееластична; *в* — одинично еластична; *г* — абсолютно еластична; *д* — абсолютно нееластична

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Якою буде відсоткова зміна попиту, якщо еластичність попиту дорівнюватиме -3, а ціна зросте на 10 %?

Розв'язання

Оскільки $E_D = \frac{\Delta Q\ \%}{\Delta P\ \%}$, то $\Delta Q = E_D \cdot \Delta P = (-3) \cdot 10 = -30\ (\%)$.

Отже, обсяг попиту зменшиться на 30 %.

Задача 2. Цінова еластичність пропозиції дорівнює 1,5. На скільки повинна збільшитись ціна, щоб обсяг виробництва збільшився на 15 %?

Розв'язання

Відомо, що $E_S = \frac{\Delta Q_S\ \%}{\Delta P\ \%}$. Тоді $\Delta P = \frac{\Delta Q}{E_S} = \frac{15\%}{1{,}5} = 10\ \%$. Отже, ціна повинна збільшитись на 10 %.

Задача 3. При збільшенні ціни на взуття з 150 до 300 грн за пару попит на нього зменшиться з 50 до 40 пар. Чи еластичним буде попит за ціною взуття 150 грн за пару?

Розв'язання

$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1}$, де ΔQ і ΔP — зміна попиту та зміна ціни відповідно; P_1 — значення ціни, при якій треба знайти еластичний попит на взуття, та відповідний обсяг попиту Q_1. Таким чином, $E_D = \frac{(40-50) \cdot 150}{(300-150) \cdot 50} = 0{,}2$. Звідси $|E_D| < 1$. Попит є нееластичним.

Задача 4. Коли ціна на товар Y зросла з 10 до 15 грн за 1 од., споживання товару X збільшилося з 50 до 75 од. Обчисліть коефіцієнт перехресної еластичності попиту за ціною 10 грн і визначте, якими є товари X і Y відносно один до одного.

Розв'язання

Підставимо у формулу $E_{XY} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X}$ відомі нам з умови задачі дані: $E_{XY} = \frac{75-50}{15-10} \cdot \frac{10}{15} = 1$. Отже, коефіцієнт перехресної еластичності попиту дорівнює 1.

Оскільки $E_{XY} > 0$, то товари X і Y є замінниками один одного (товари-субститути).

Задача 5. Доходи родини зросли з 800 до 1500 грн на місяць, а її витрати на товар N за цей самий період зросли відповідно з 75 до 125 грн. Обчисліть коефіцієнт еластичності попиту за доходом 800 грн і визначте, яким є товар N — предметом розкоші чи предметом першої необхідності.

Розв'язання

Формула для обчислення еластичності попиту за доходом: $E_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \frac{I}{Q}$; звідки $E = \frac{125-75}{1500-800} \cdot \frac{800}{75} = 0{,}761909 \approx 0{,}76$. Отже, коефіцієнт еластичності попиту становить приблизно 0,76.

Оскільки $0 < E_I < 1$, то товар N — товар першої необхідності.

Задача 6. На ринку зерна внаслідок збільшення попиту населення на хліб ціна 1 т зерна збільшилась з 700 до 920 грн. Це привело до збільшення пропозиції зерна з 450 до 600 тис. т на місяць. Визначте еластичність пропозиції.

Розв'язання

$E_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{\bar{P}}{\bar{Q}_S}$, де ΔQ і ΔP — зміна пропозиції та ціни відповідно; $\bar{P}$ і $\bar{Q}$ — середні значення ціни та пропозиції відповідно. $\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{920+700}{2} = 810$; $\bar{Q} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{450+600}{2} = 525$. Тоді $E_S = \frac{(600-450)}{(920-700)} \cdot \frac{810}{525} = 1{,}051948 \approx 1{,}05$.

Оскільки $E_S > 1$, то пропозиція еластична.

Заняття 9–10

Тема. ***Еластичність та її види***

Мета: формувати вміння обчислювати еластичність попиту та еластичність пропозиції.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: еластичність, еластичність попиту, еластичність пропозиції, види еластичності, формули для обчислення еластичності попиту та еластичності пропозиції, функція попиту та функція пропозиції (загальний вигляд цих лінійних функцій).

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Використавши таблицю, визначте, чи є попит на картоплю еластичним.

Ціна за 1 кг (грн)	Обсяг попиту (кг)
3,0	2100
4,8	1800

Розв'язання

$\bar{E}_D = \frac{\Delta Q_D}{\Delta P} \cdot \frac{\bar{P}}{\bar{Q}_D}$, де ΔQ_D і ΔP — зміна попиту та зміна ціни відповідно; $\bar{P}$ і $\bar{Q}_D$ — середні значення ціни та попиту відповідно.

$\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{3 + 4,8}{2} = 3,9$; $\bar{Q} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{1800 + 2100}{2} = 1950$. Тоді $E_D = \frac{(1800 - 2100) \cdot 3,9}{(4,8 - 3,0) \cdot 1950} = -0,3$. Звідси $|E_D| = 0,3$. Отже, попит на картоплю нееластичний.

Задача 2. Ціна товару зросла з 2 до 2, 5 грн. за 1 од., а обсяг пропозиції збільшився з 700 до 800 од. на тиждень. Обчисліть коефіцієнт цінової еластичності пропозиції перед початком змін.

Розв'язання

$E_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{\bar{Q}_S}$, де ΔQ_S і ΔP — зміна пропозиції та зміна ціни відповідно; $\bar{P}$ і $\bar{Q}_S$ — значення ціни та величини пропозиції відповідно, для яких треба обчислити еластичність пропозиції.

Підставимо відомі з умови задачі дані: $E_S = \frac{800 - 700}{2,5 - 2} \cdot \frac{2}{700} = 0,57$. Оскільки $E_S < 1$, то пропозиція нееластична.

Задача 3. Рівноважна ціна на ринку яблук дорівнює 2 грн за 1 кг, при цьому обсяг продажу становить 5000 кг. Коефіцієнт еластичності попиту за ціною дорівнює -1, коефіцієнт пропозиції дорівнює 0,5. Визначте величину дефіциту (надлишку), якщо керівництво ринку встановило нову ціну на яблука на рівні 1,8 грн за 1 кг.

Розв'язання

За умовою задачі параметри рівноваги становлять: $P_0 = 2$, $Q_0 = 5000$.

Відомо, що нову ціну встановили на рівні 1,8 грн за 1 кг. Крім того, за умовою задачі задано коефіцієнти цінової еластичності попиту та пропозиції. Отже, запишемо такі рівності:

$$E_D = \frac{Q_D - Q_0}{P_1 - P_0} \cdot \frac{P_0}{Q_0};\ -1 \frac{Q_D - 5000}{1,8 - 2,0} \cdot \frac{2}{5000};\ \text{звідси}\ Q_D = 5500.$$

$$E_S = \frac{Q_S - Q_0}{P_1 - P_0} \cdot \frac{P_0}{Q_0};\ 0,5 = \frac{Q_S - 5000}{1,8 - 2,0} \cdot \frac{2}{5000};\ \text{звідси}\ Q_S = 4750.$$

Оскільки $Q_S < Q_D$, то на ринку виникне дефіцит у розмірі: $Q_D - Q_S = 5500 - 4750 = 750$ (кг).

Задача 4. Зміна ціни мінеральної води з 0,6 до 0,7 грн за 1 л привела до того, що кількість проданого лимонаду збільшилась з 44 до 47 л. Визначте перехресну еластичність попиту за умови, що ціна дорівнює 0,6 грн.

Розв'язання

Підставимо відомі з умови задачі дані у формулу перехресної еластичності попиту:

$E_{XY} = \frac{\Delta Q_X}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X}$; $E_{XY} = \frac{47 - 44}{0,7 - 0,6} \cdot \frac{0,6}{44} = 0,41$, тобто $E_{XY} > 0$. Отже, це товари-замінники.

Задача 5. Припустимо, що попит на деякий товар при доході 2000 грн на місяць складає 100 од. Дохід збільшився на 200 грн. На скільки одиниць повинно збільшитись споживання цього товару, щоб еластичність попиту за доходом дорівнювала 1,5?

Розв'язання

Скористаємося формулою еластичності: $E_I = \frac{\Delta Q}{\Delta I} \cdot \frac{I}{Q}$;

$1,5 = \frac{\Delta Q}{200} \cdot \frac{2000}{100}$; звідси $\Delta Q = 15$.

Отже, споживання даного товару повинно збільшитись на 15 одиниць.

Задача 6. Вартість квитка автобуса складає 1 грн. Щодня послугами даного автобуса користується 1500 чоловік. Відомо, що еластичність попиту становить -6, еластичність пропозиції дорівнює 1. Визначте аналітичний вигляд функцій попиту та пропозиції (за умови, що ці функції лінійні).

Розв'язання

За умовою задачі функція попиту лінійна, тоді вона має такий вигляд: $Q_D = kP + b$, де k — коефіцієнт, який визначає кут нахилу кривої попиту $\left(k = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)$. Еластичність попиту за ціною дорівнює: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1}$; $-6 = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{1}{1500}$. Тоді $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -9000$. Звідси $k = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -9000$. Щоб визначити значення параметра b, підставимо відомі з умови задачі дані у функцію попиту: $Q_D = kP + b$; $1500 = -9000 \cdot 1 + b$; $b = 9000 + 1500 = 10\ 500$. Отже, функція попиту має вигляд: $Q_D = -9000 \cdot P + 10\ 500$.

Аналогічно знайдемо функцію пропозиції. Загальний вигляд лінійної функції пропозиції: $Q_S = k_1 P + b_1$, де k_1 — коефіцієнт, який визначає кут нахилу кривої пропозиції $\left(k = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)$. Еластичність пропозиції за ціною дорівнює: $E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$; $1 = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{1}{1500}$. Звідси $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = 1500$, тоді $k_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = 1500$. Визначимо параметр b_1: $Q_S = k_1 P + b_1$; $1500 = 1500 \cdot 1 + b_1$; $b_1 = 1500 - 1500 = 0$. Отже, функція пропозиції має вигляд: $Q_S = 1500 \cdot P$.

Задача 7. На ринку бананів встановилася рівновага при $P = 3$ і $Q = 15$. При цьому коефіцієнт цінової еластичності попиту дорівнює $-0{,}06$, а коефіцієнт цінової еластичності пропозиції становить 0,12. Якою буде ціна бананів, якщо попит на них збільшиться на 10 %, а пропозиція збільшиться на 8 % (функції попиту та пропозиції лінійні)?

Розв'язання

Лінійна функція попиту має вигляд: $Q_D = a - bP$, де a і b — сталі величини. Лінійна функція пропозиції має вигляд: $Q_S = c + dP$, де c і d — сталі величини. Щоб визначити значення параметра b, підставимо відомі з умови задачі дані у функцію попиту: $E_D = -b\frac{P}{Q_D}$; $-0{,}06 = -b\frac{3}{15}$. Звідси $b = 0{,}3$. Щоб визначити значення параметра d, підставимо відомі з умови задачі дані у функцію пропозиції: $E_S = d\frac{P}{Q_S}$; $0{,}12 = d\frac{3}{15}$. Звідси $d = 0{,}6$. Аналогічно обчислимо значення параметра a з функції попиту: $a = Q_D + bP = 15 + 0{,}3 \cdot 3 = 15{,}9$. З функції пропозиції обчислимо значення параметра c: $c = Q_S - dP = 15 - 0{,}6 \cdot 3 = 13{,}2$. Таким чином, визначивши всі коефіцієнти, можна записати функції попиту та пропозиції: $Q_D = 15{,}9 - 0{,}3P$; $Q_S = 13{,}2 + 0{,}6P$.

Після збільшення попиту на банани на 10 % і збільшення пропозиції на банани на 8 % встановиться нова рівновага на ринку: $1{,}1 \cdot (15{,}9 - 0{,}3 \cdot P) = 1{,}08 \cdot (13{,}2 + 0{,}6 \cdot P)$; $P_1 = 3{,}3$; $Q_1 = 16{,}4$.

Заняття 11–12

Тема. ***Виручка та еластичність***

Мета: ознайомити учнів із залежністю виручки від реалізації та еластичності попиту на певний товар; формувати вміння встановлювати взаємозалежність еластичності попиту та доходів.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: еластичність попиту (графіки, формули для обчислення); еластичність пропозиції (графіки та формули), дохід (виручка від реалізації).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Показник цінової еластичності попиту можна використовувати для аналізу витрат споживача на купівлю товару, отже, можна встановити взаємозалежність еластичності попиту за ціною та доходів підприємства.

Поняття виручки

Загальна (сукупна, валова) виручка від реалізації (дохід, виторг) (TR) — це сума коштів, яку одержить підприємство від реалізації продукції за певний час. Він дорівнює добутку ціни (P) проданого товару та обсягу продажу (Q):

$$TR = P \cdot Q.$$

Для продавців є важливими такі питання: яку ціну (P) встановити, щоб отримати найбільший виторг $(TR = P \cdot Q)$; чи варто підвищувати (знижувати) ціну тощо.

Зауважимо, що загальний виторг продавців одночасно є витратами покупців.

Еластичність лінійної функції попиту

Розглянемо на графіку еластичність лінійної функції попиту.

З формули еластичності попиту $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = -b\frac{P}{Q}$ видно, що $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -b$, де $-b$ — кутовий коефіцієнт прямої, який є сталою величиною. Тому зосередимо увагу на відношенні $\frac{P}{Q}$ (рис. 1). Це змінна величина, і саме вона спричиняє зміну еластичності попиту.

За графіком видно, що чим ближче до точки перетину прямої та осі ординат, тим відношення $\frac{P}{Q}$ більше; власне в точці перетину $Q = 0$, тому в цій точці $|E_D| = \infty$. Чим ближче до точки перетину прямої та осі абсцис, тим відношення $\frac{P}{Q}$ менше; власне в точці перетину $P = 0$, тому в цій точці $|E_D| = 0$.

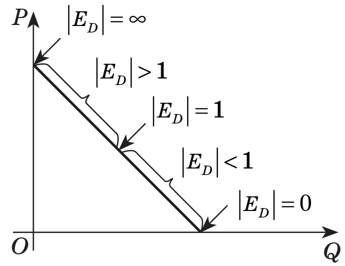


Рис. 1

Посередині між точкою перетину осі абсцис і точкою перетину осі ординат існує точка, де $P = Q$, тоді $|E_D| = 1$. Вище цієї точки $|E_D| > 1$ (оскільки $P > Q$), нижче цієї точки $|E_D| < 1$ (оскільки $P < Q$). Тобто у верхній частині прямої попит є еластичним, а в нижній — нееластичним. Між ними розміщується точка, в якій еластичність одинична. Дана залежність має місце для всіх лінійних функцій попиту.

Для нелінійних функцій попиту ця закономірність не є обов'язковою: вона може як виконуватися, так і не виконуватися.

Взаємозалежність виручки та еластичності попиту

Розглянемо взаємозалежність виручки підприємства та еластичності попиту.

Якщо попит на товар еластичний $(|E_D| > 1)$, то незначне зниження ціни на товар приведе до значного збільшення витрат покупців (виручки продавців).

На рис. 2 витрати покупців (виручка продавців) — площа прямокутників OP_1AQ_1 і OP_2BQ_2. Із рис. 2 бачимо, що у верхній частині прямої попиту при зменшенні ціни з P_1 до P_2 втрати виторгу (P_1AKP_2) значно менші, ніж приріст виторгу від збільшення обсягу покупок (Q_1KBQ_2).

Якщо попит на товар нееластичний $(|E_D| < 1)$, то значне зниження ціни на товар приведе до незначного збільшення витрат покупців (виручки продавців).

На рис. 3 витрати покупців (виручка продавців) — площа прямокутників OP_3CQ_3 і OP_4DQ_4. Із рис. 3 бачимо, що у нижній частині прямої попиту при зменшенні ціни з P_3 до P_4 втрати виторгу (P_3CMP_4) значно перевищують приріст виторгу від збільшення обсягу покупок (Q_3MDQ_4).

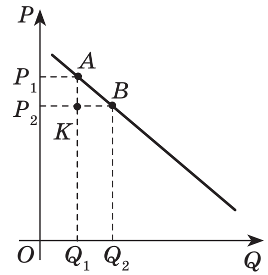


Рис. 2

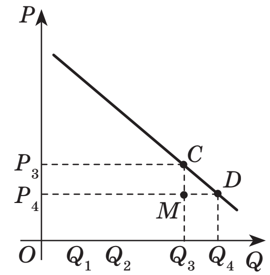


Рис. 3

У точці, де $|E_D| = 1$, витрати покупців та виручка продавців сягають свого максимального значення.

Таким чином, можна зробити такі висновки щодо взаємозалежності виручки підприємства та еластичності попиту:

1) якщо попит за ціною на продукцію є еластичним $(E_P > 1)$, то збільшення доходу можливе лише за умови зниження ціни;
2) якщо попит за ціною є нееластичним $(E_P < 1)$, то підприємство зможе збільшувати дохід, підвищуючи ціну.

Щоб визначити ціну та кількість, при яких виручка набуває максимального значення $(|E_D| = 1)$, можна скористатись формулами: $P_{\max} = \frac{a}{2b}$; $Q_{\max} = \frac{a}{2}$.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Магазин може продати в день 200 од. шоколадних батончиків за ціною 10 грн за 1 од., а 325 од. шоколадних батончиків — за ціною 8 грн за 1 од. Визначте, чи буде попит еластичним в інтервалі цін від 8 до 10 грн за 1 од. товару.

Розв'язання

Обчислимо дохід магазину у даних двох випадках: $TR(10)=10\cdot 200=2000$ (грн); $TR(8)=8\cdot 325=2600$ (грн). Проаналізуємо зміну доходу від зміни ціни: $TR\uparrow$, $P\downarrow$; $TR\downarrow$, $P\uparrow$. Збільшення доходу відбувається за рахунок зменшення ціни.

Отже, в інтервалі цін від 8 до 10 грн за 1 од. попит буде еластичним.

Задача 2. Попереднього року попит пшениці становив 1000 т за ціною 120 грн за 1 т. Еластичність попиту за ціною дорівнювала 0,5. Наступного року через неврожай аграрії поставили лише 80 % обсягу пропозиції попереднього року. Визначте, якою повинна стати ціна пшениці наступного року, щоб відновилась ринкова рівновага, і як зміниться при цьому виторг аграріїв.

Розв'язання

Спочатку обчислимо виторг аграріїв за попередній рік: $TR = P\cdot Q = 120\cdot 1000 = 120\,000$ (грн). Знайдемо, як змінилась ціна наступного року: $E_D = \frac{\Delta Q\ \%}{\Delta P\ \%}$; $0{,}5 = \frac{20\ \%}{\Delta P\ \%}$; $\Delta P = 40\ \%$. Тобто ціна рівноваги у наступному році дорівнюватиме: $P_1 = 120\cdot 1{,}4 = 168$ (грн).

Визначимо обсяг пшениці на наступний рік: $Q_1 = 1000\cdot 0{,}8 = 800$ (т). Обчислимо виторг аграріїв на наступний рік: $TR_1 = P_1Q_1 = 168\cdot 800 = 134\,400$ (грн). Отже, $TR_1 - TR = 134\,400 - 120\,000 = 14\,400$ (грн).

Таким чином, виторг аграріїв у наступному році зросте на 14 400 грн.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 3. Функція попиту на товар описується рівнянням $Q_D = \frac{5}{\sqrt{P}}$. Як повинна змінитись ціна на цей товар, якщо виторг зросте на 20 %?

Розв'язання

Визначимо виторг: $TR = P\cdot Q = P\cdot \frac{5}{\sqrt{P}} = 5\sqrt{P}$. За умовою задачі $\frac{TR_1}{TR} = 1{,}2$, тоді $\frac{5\sqrt{P_1}}{5\sqrt{P}} = 1{,}2$; $\sqrt{\frac{P_1}{P}} = 1{,}2$; $\frac{P_1}{P} = 1{,}44$.

Отже, за нових умов ціна повинна збільшитись на 44 %.

Задача 4. Обчисліть коефіцієнт еластичності попиту за ціною, якщо ціна підприємства на товар у наступному році порівняно з попереднім зменшилась на 20 %, а виторг зменшився на 8 %.

Розв'язання

Визначимо, як змінився обсяг продажу: $TR = P\cdot Q$; $0{,}92 = 0{,}8\cdot Q$; $Q = 1{,}15$.

Отже, обсяг продажу збільшився на 15 %.

Тоді обчислимо коефіцієнт еластичності за формулою: $E_D = \frac{\Delta Q\ \%}{\Delta P\ \%}$; $E_D = \frac{15\ \%}{20\ \%} = 0{,}75$.

При зменшенні ціни на товар дохід підприємства теж зменшився, тобто попит на даний товар є нееластичним. Отже, коефіцієнт еластичності попиту в наступному році буде $|E_D| < 1$.

Задача 5. Функцію попиту на товар задано рівнянням $Q_D = 120 - 4P$. Визначте, якими мають бути ціна (у грн) та обсяг продажу (в од.), щоб виручка від реалізації товару була максимальною.

Розв'язання

Щоб визначити ціну та обсяг продажу, при яких виручка набуває максимального значення $(|E_D| = 1)$, можна скористатись формулами: $P_{\max} = \frac{a}{2b}$ і $Q_{\max} = \frac{a}{2}$.

Тоді $P_{\max} = \frac{120}{2\cdot 4} = 15$; $Q_{\max} = \frac{120}{2} = 60$.

Отже, за ціною 15 грн та обсязі продажу 60 од. виробник буде отримувати максимальну виручку.

Задача 6. Функція попиту на товар описується рівнянням $Q_D = 60 - 3P$. На ринку встановилася ціна, яка характеризується одиничною еластичністю попиту за ціною та еластичністю пропозиції $\frac{2}{3}$. Запишіть рівняння функції пропозиції та знайдіть рівноважну ціну й обсяг продажу.

Розв'язання

Якщо $|E_D| = 1$, то виручка набуде максимального значення. При цьому ціну та обсяг продажу можна визначити за формулами: $P_{\max} = \frac{a}{2b}$ і $Q_{\max} = \frac{a}{2}$. Звідси $P_{\max} = \frac{60}{2\cdot 3} = 10$; $Q_{\max} = \frac{60}{2} = 30$.

Отже, на ринку було встановлено рівноважну ціну на рівні 10 у. о., при цьому обсяг продажу становив 30 од.

Запишемо рівняння функції пропозиції: $Q_S = c + dP$. За умовою еластичність пропозиції у точці рівноваги дорівнює $\frac{2}{3}$. Тоді з формули еластичності пропозиції $E_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = d\frac{P}{Q}$ випливає, що $\frac{2}{3} = d\frac{10}{30}$; $d = 2$. Підставимо відомі дані у рівняння функції пропозиції: $30 = c + 2 \cdot 10$; $c = 10$.

Отже, рівняння функції пропозиції має вигляд: $Q_S = 10 + 2P$.

Задача 7. Функцію попиту на товар задано рівнянням $Q_D = 10 - P$. Коефіцієнт еластичності попиту за ціною зменшився за модулем від 4 до $\frac{1}{3}$. Визначте, як змінився при цьому виторг.

Розв'язання

З формули еластичності попиту за ціною знайдемо попередні ціну та обсяг продажу: $E_D = -b\frac{P}{Q_D}$; $-4 = -1\frac{P_1}{10 - P_1}$; $P = 8$, $Q = 2$. Визначимо попередній виторг: $TR = P \cdot Q = 8 \cdot 2 = 16$.

З формули еластичності попиту обчислимо нові ціну та обсяг попиту: $E_D = -b\frac{P}{Q_D}$; $-\frac{1}{3} = -1\frac{P_1}{10 - P_1}$; $P_1 = 2{,}5$; $Q_1 = 7{,}5$. Знайдемо новий виторг: $TR_1 = P_1 \cdot Q_1 = 2{,}5 \cdot 7{,}5 = 18{,}75$.

Визначимо зміну виторгу: $\Delta TR = TR_1 - TR = 2{,}75$.

Заняття 13

Тема. ***Ціноутворення та наслідки втручання держави у цей процес***

Мета: ознайомити учнів із характером та особливостями поведінки функцій попиту та пропозиції під впливом держави.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: функція попиту, функція пропозиції, податок, субсидія.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Наслідки державного втручання у ціноутворення

Розглянемо політику оподаткування.

Зазначимо, що податки сплачують ті, на кого вони покладені законодавчо. Але юридичне визначення платника податків (продавця або покупця) не впливає на економічний розподіл податків. Податкове навантаження несуть обидва суб'єкти ринку.

Розглянемо можливий варіант розподілу податкового тягаря T (t — ставка податку) між продавцем та покупцем (рис. 1). Площа A (прямокутник $P_0P_1E_1M$) — частина податкового тягаря, яку нестимуть покупці. Площа B (прямокутник P_2P_0MK) — частина податкового тягаря, яку нестимуть продавці.

Ці частини можуть бути також визначені аналітично:

$T_D = (P_1 - P_0) \cdot Q_1$ — податковий тягар покупців;

$T_S = (P_0 - P_2) \cdot Q_1$ — податковий тягар продавців.

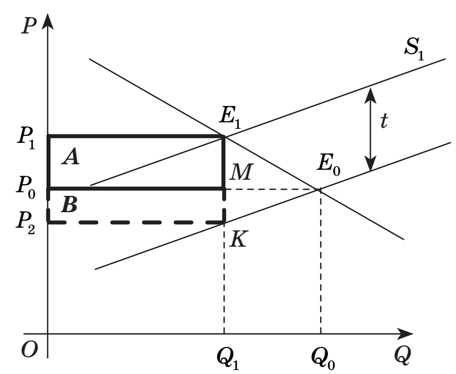


Рис. 1. Розподіл податкового тягаря між продавцем та покупцем

Проаналізуємо розподіл вигоди від надання державою субсидії виробникам (рис. 2). Площа A (прямокутник $P_0P_1E_1M$) — частина вигід, яку одержують покупці. Площа B (прямокутник P_2P_0MK) — частина вигід, яку одержують продавці.

Ці частини можуть бути визначені аналітично:

$B_D = (P_0 - P_1)Q_1$ — вигоди споживачів;

$B_S = (P_2 - P_0)Q_1$ — вигоди виробників.

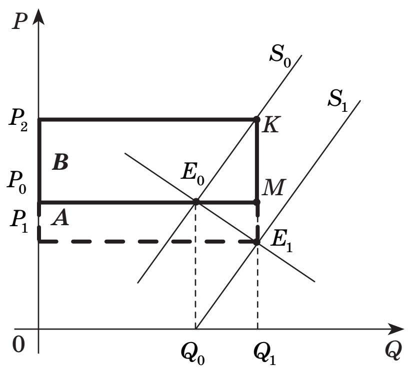


Рис. 2. Розподіл вигід субсидій
між виробниками та споживачами

При цьому державне втручання впливає на вигляд функцій попиту та пропозиції таким чином:

1) при введенні податку як певної суми з одиниці товару рівняння пропозиції матиме вигляд $Q_S = -c + d(P - t)$, при цьому рівняння попиту залишається незмінним;
2) при введенні відсоткового податку рівняння пропозиції матиме вигляд $Q_S = -c + d(1 - t)P$, при цьому рівняння попиту залишається незмінним;
3) при введенні субсидії як певної суми на одиницю товару рівняння пропозиції матиме вигляд $Q_S = -c + d(P + \text{sub})$, при цьому рівняння попиту залишається незмінним.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

На основі наведених задач учні зможуть моделювати певні життєві ситуації і в майбутньому зробити відповідні висновки щодо тих чи інших економічних подій.

Задача 1. Функцію попиту населення на даний товар задано рівнянням $Q_D = 9 - P$, функцію пропозиції на даний товар — рівнянням $Q_S = -6 + 2P$. На цей товар встановлено податок, що сплачується продавцем, у розмірі 3 грн за 1 од. Визначте рівноважну ціну та рівноважний обсяг продажу до встановлення податку державою та після цього.

Розв'язання

Визначимо рівноважну ціну та рівноважний обсяг продажу до встановлення податку: $Q_D = Q_S$; $9 - P = -6 + 2P$; $P = 5$. Підставимо знайдене значення P у функцію пропозиції: $Q = 4$.

Знайдемо функцію пропозиції після введення податку: $Q_S = -6 + 2(P - 3)$; $Q_{S\text{ нова}} = -12 + 2P$. Знайдемо рівноважну ціну та рівноважний обсяг продажу після встановлення податку: $Q_D = Q_{S\text{ нова}}$; $9 - P = -12 + 2P$; $P = 7$, звідси $Q = 2$.

Задача 2. Відомо, що функцію попиту на товар задано рівнянням $Q_D = 40 - 4P$, функцію пропозиції — рівнянням $Q_S = 10 + 2P$. 1) Обчисліть рівноважні параметри (ціну та обсяг). 2) Опишіть ситуацію, яка виникне на ринку, якщо держава встановить фіксовану ціну товару у розмірі 7 грн за 1 од. 3) Як зміняться параметри рівноваги, якщо держава уведе податок з продажу у розмірі 3 грн з кожної одиниці товару? 4) Як зміняться параметри рівноваги, якщо держава дасть субсидію (дотацію) виробнику у розмірі 3 грн на кожну одиницю товару?

Розв'язання

1) Знайдемо параметри рівноваги до введення державою фіксованої ціни товару, податку та дотації: $Q_D = Q_S$; $10 + 2P = 40 - 4P$; $P = 5$. Тоді $Q = 20$.

2) Якщо держава встановить на ринку фіксовану ціну у розмірі 7 грн за 1 од. товару, то на ринку виникне надлишок (оскільки фіксована ціна товару вища за рівноважну).

Розмір надлишку після встановлення фіксованої ціни дорівнюватиме: $Q_S(7) - Q_D(7) = 10 + 2 \cdot 7 - 40 + 4 \cdot 7 = 12$.

3) Податок є неціновим фактором пропозиції. Тому після введення податку рівняння пропозиції зміниться таким чином: $Q_{S_1} = 10 + 2(P - 3)$, тобто $Q_{S_1} = 4 + 2P$.

Знайдемо параметри рівноваги після введення податку: $40 - 4P = 4 + 2P$; $P_1 = 6$; $Q_1 = 16$.

4) Дотація є неціновим фактором пропозиції. Тому після введення податку рівняння пропозиції зміниться таким чином: $Q_{S_2} = 10 + 2(P + 3)$, тобто $Q_{S_2} = 16 + 2P$.

Знайдемо параметри рівноваги після надання дотації: $40 - 4P = 16 + 2P$; $P_2 = 4$; $Q_2 = 24$.

Заняття 14–16

Тема. ***Ціноутворення та наслідки втручання держави у цей процес.***

Мета: сформувати вміння визначати зміни функцій попиту та пропозиції під впливом держави.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: функція попиту, функція пропозиції, нецінові фактори попиту, нецінові фактори пропозиції.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. На ринку соку та мінеральної води функцію попиту задано рівнянням $Q_D = 400 - 3P$, функцію пропозиції — рівнянням $Q_S = 200 + 2P$, де Q_D — попит на сік (у літрах); Q_S — пропозиція на мінеральну воду (у літрах); P — ринкова ціна соку (у грн). 1) Визначте рівноважну кількість і рівноважну ціну на ринку соку та мінеральної води. 2) Покажіть ціну ринкової рівноваги графічно. 3) Що відбудеться з попитом населення на сік, якщо раптом значно зросте ціна на мінеральну воду? Побудуйте графік.

Розв'язання

1) Визначимо рівноважну ціну та обсяг продажу соку та мінеральної води: $Q_D = Q_S$; $400 - 3P = 200 + 2P$; $P = 40$. Підставимо знайдене значення P у функцію пропозиції: $Q = 280$.

2) Побудуємо графік (рис. 1).

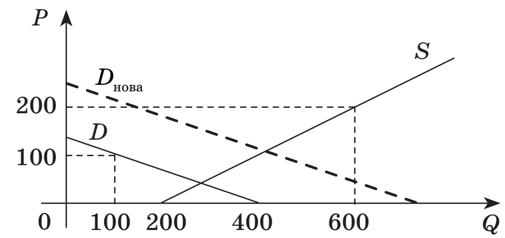


Рис. 1

3) Сік та мінеральна вода є товарами-замінниками, тому у випадку значного зростання ціни на мінеральну воду крива попиту на ринку соку зсунеться праворуч (попит зросте).

Задача 2. Функція попиту на товар описується рівнянням $Q_D = 400 - P$, а пропозицію — рівнянням $Q_S = 4P - 150$. 1) Визначте рівноважну ціну і рівноважний обсяг продажу на ринку

товару. 2) Побудуйте графіки попиту та пропозиції. 3) Опишіть ситуацію, яка виникне на ринку, якщо держава введе податок на виробництво товару у розмірі 10 грн на 1 од.

Розв'язання

1) Визначимо рівноважні ціну та обсяг продажу до введення податку: $Q_D = Q_S$; $400 - P = 4P - 150$; $P = 110$.

Підставимо знайдене значення P у функцію пропозиції: $Q = 400 - 110 = 290$.

2) Побудуємо графік (рис. 2).

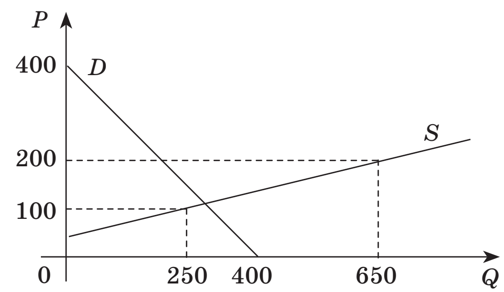


Рис. 2

3) Знайдемо функцію пропозиції після введення податку: $Q_{S\ нова} = 4(P - 10) - 150$; $Q_{S\ нова} = 4P - 190$.

Знайдемо рівноважну ціну та рівноважний обсяг продажу товару після встановлення податку: $Q_D = Q_{S\ нова}$; $400 - P = 4P - 190$; $P = 118$, звідси $Q = 382$.

Задача 3. Функцію пропозиції задано рівнянням $Q_S = -6 + 3P$. Знайдіть функцію пропозиції після введення державою податку у розмірі 5 у. о. на 1 од. товару. Відповідь проілюструйте графічно.

Розв'язання

Запишемо нове рівняння пропозиції: $Q_S = -6 + 3(P - 5) = -21 + 3P$.

Побудуємо графік (рис. 3).

Введення податку зсуває криву пропозиції на величину податку.

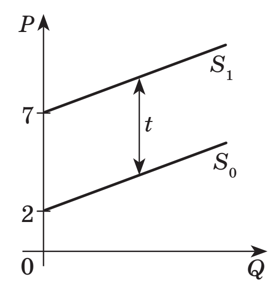


Рис. 3

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 4. Функція попиту має вигляд $Q_D = 6 - P$, функція пропозиції — вигляд $Q_S = -3 + 2P$. Функції попиту та пропозиції лінійні. Держава ввела податок у розмірі 3 грн на одиницю товару.

1) Визначте параметри рівноваги до введення податку.

2) З'ясуйте, як відбудеться розподіл податкового тягаря між виробниками та споживачами (обчисліть суму податку, яку заплатять покупці, та суму податку, яку заплатять виробники). Відповідь проілюструйте графічно.

Розв'язання

1) Знайдемо параметри рівноваги до введення податку: $Q_D = Q_S$; $6 - P = -3 + 2P$; $P = 3$; $Q = 3$.

2) Знайдемо рівняння пропозиції після введення податку: $Q_{S_1} = -3 + 2(P - 3)$; $Q_{S_1} = -9 + 2P$.

Обчислимо параметри рівноваги після введення податку: $Q_D = Q_{S_1}$; $6 - P = -9 + 2P$; $P_1 = 5$; $Q_1 = 1$.

Побудуємо графік (рис. 4).

Визначимо загальну суму податкових витрат споживачів і виробників (із рис. 4): $T = t \cdot Q_1 = 3 \cdot 1 = 3$ (грн).

Величина податкового тягаря, яку сплачує споживач, визначається за формулою: $T_D = (P_1 - P_0) \cdot Q_1$;

$T_D = (5 - 3) \cdot 1 = 2$ (грн).

Тоді податковий тягар, який повинен сплатити виробник, дорівнює: $T - T_D = 3 - 2 = 1$ (грн).

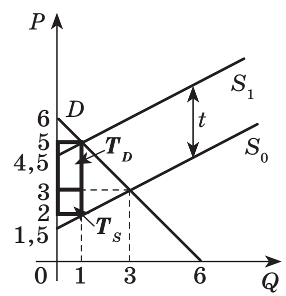


Рис. 4

Задача 5. Відомо, що функцію попиту на товар задано рівнянням $Q_D = 8 - P$, а функцію пропозиції — рівнянням $Q_S = -4 + 2P$, де P — ринкова ціна (у грн); Q_D — попит (в од.); Q_S — пропозиція (в од.). 1) Знайдіть рівноважну ціну і рівноважну кількість на ринку товару. 2) Визначте, що відбудеться на ринку, якщо держава встановить фіксовану ціну на товар у розмірі 3 грн за одиницю (відповідь проілюструйте графічно та аналітично). 3) Як зміниться рівноважні ціна та обсяг продажу, якщо держава: а) введе податок з продажу у розмірі 3 грн на кожну одиницю товару; б) надасть субсидію виробнику у розмірі 3 грн на кожну одиницю товару?

Розв'язання

1) Визначимо рівноважні ціну та обсяг продажу: $Q_D = Q_S$; $8 - P = -4 + 2P$; $P = 4$. Підставимо знайдене значення P у функцію пропозиції: $Q = 4$.

2) Побудуємо графік (рис. 5).

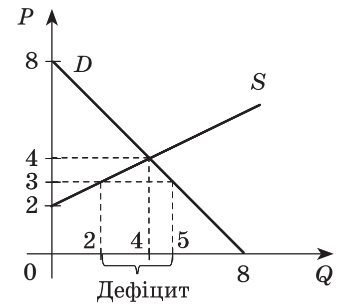


Рис. 5

Якщо держава встановить фіксовану ціну на товар у розмірі 3 грн за 1 од., то величина попиту дорівнюватиме: $Q_D = 8 - 3 = 5$ (од.), величина пропозиції становитиме: $Q_S = -4 + 2 \cdot 3 = 2$ (од.). Величина попиту перевищує величину пропозиції, тому на ринку виникне дефіцит в розмірі: $Q_D - Q_S = 5 - 2 = 3$ (од.).

3) а) Знайдемо функцію пропозиції після введення податку: $Q_{S\text{ нова}} = -4 + 2(P - 3)$; $Q_{S\text{ нова}} = -10 + 2P$.

Знайдемо рівноважну ціну та рівноважний обсяг продажу товару після встановлення податку: $Q_D = Q_{S\text{ нова}}$; $8 - P = -10 + 2P$; $P = 6$, звідси $Q = 2$.

б) Знайдемо функцію пропозиції після надання субсидії: $Q_{S\text{ нова}} = -4 + 2(P + 3)$; $Q_{S\text{ нова}} = 2P + 2$.

Задача 6. Функція попиту має вигляд $Q_D = 500 - P$, функція пропозиції — вигляд $Q_S = 2P - 100$. 1) Визначте рівноважні параметри (ціну та кількість товару). 2) Як зміняться параметри, якщо держава надасть виробникам субсидію у розмірі 150 грн на одиницю товару? 3) Визначте аналітично розподіл вигод між споживачем та виробником від надання виробникам субсидії. Відповідь проілюструйте графічно.

Розв'язання

1) Обчислимо параметри рівноваги: $Q_D = Q_S$; $500 - P = 2P - 100$; $P = 200$; $Q = 300$.

2) Визначимо рівняння пропозиції після надання субсидії: $Q_{S_1} = 2(P+150)-100$; $Q_{S_1} = 2P+200$.

Тоді знайдемо нові параметри рівноваги: $Q_D = Q_{S1}$; $500-P = 2P+200$; $P_1 = 100$; $Q_1 = 400$.

3) Побудуємо графік (рис. 6).

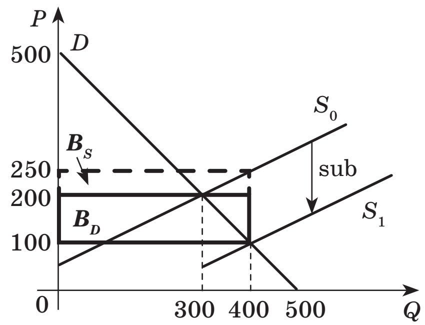


Рис. 6

Із наданням субсидії крива пропозиції зсунеться праворуч на величину субсидії.

Площа B_D — частина вигод, яку одержують споживачі. Площа B_S — частина вигод, яку одержують виробники. Обчислимо вигоди споживачів: $B_D = (P_0 - P_1)Q_1$, тоді $B_D = (200-100)\cdot 400 = 40\,000$ (грн). Знайдемо вигоди виробників: $B_S = (P_2 - P_0)Q_1$, тоді $B_S = (250-200)\cdot 400 = 20\,000$ (грн).

У даному випадку споживачі отримають більшу вигоду.

Заняття 17

Тема. ***Функції витрат і доходу***

Мета: ознайомити учнів із характером та особливостями поведінки функцій попиту та пропозиції; формувати вміння використовувати функції попиту та пропозиції в задачах математичної економіки, визначати рівноважну ціну за графіком.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: витрати (постійні, змінні), дохід (виручка від реалізації).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття функції витрат

Функція витрат — залежність між загальними витратами виробництва деякої продукції та обсягом виробництва цієї продукції.

Загальні витрати виробництва (TC) визначаються як сума постійних витрат (FC) і змінних витрат (VC) (рис. 1): $TC = FC + VC$.

Види витрат

Постійні витрати (FC) — це витрати, які не залежать від змін обсягу виробництва (див. рис. 1) (наприклад, зарплата управлінського персоналу, оренда, відсотки за кредити тощо).

Змінні витрати (VC) — це ті витрати, які зростають у разі збільшення випуску продукції і зменшуються у разі його скорочення (див. рис. 1). Наприклад, витрати на сировину, паливо, електроенергію, зарплата робітникам тощо.

Функція змінних витрат може бути як лінійною, так і криволінійною.

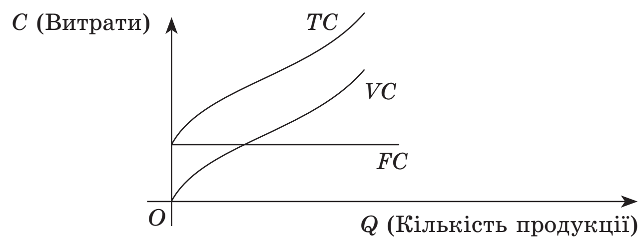


Рис. 1. Криві загальних (TC), постійних (FC) та змінних (VC) витрат підприємства

Витрати можна розглядати як у короткостроковому, так і в довгостроковому періодах.

Короткостроковий період — це такий проміжок часу, протягом якого підприємство може змінити обсяг випуску продукції тільки за рахунок змінних витрат, не змінюючи обсягів постійних витрат.

Довгостроковий період — це проміжок часу, протягом якого підприємство може перебудувати виробництво та вплинути на обсяг випуску продукції, змінюючи не тільки змінні, але й постійні витрати.

Тобто між витратами підприємства та обсягом випуску продукції існує залежність, яка має різний прояв для різних часових періодів.

Надалі будемо розглядати витрати та доходи в короткостроковому періоді.

Поняття функції доходу

Функція доходу — залежність доходу підприємства від ціни виробленої продукції:

$$R = f(P),$$

де R — дохід; P — ціна одиниці продукції.

Пригадаємо відомості щодо доходу. Дохід в економічній літературі також називають *виручкою від реалізації*.

Дохід — це сума коштів, яку одержало підприємство від реалізації продукції за певний час. Загальний дохід (TR) дорівнює ціні проданого товару (P), помноженій на обсяг продажу (Q):

$$TR(Q) = P \cdot Q.$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Маркетологи провели дослідження та визначили залежність доходу підприємства від ціни на його продукцію. Було встановлено, що тижневий дохід R є функцією ціни P: $TR = f(P) = -5P^2 + 10P + 3$. Визначте ціну продукції, при якій загальний дохід підприємства буде максимальним.

Розв'язання

Побудуємо графік (рис. 2).

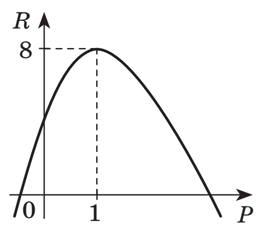


Рис. 2

Графічне зображення функції загального доходу підприємства має вигляд параболи, вітки якої напрямлені вниз (див. рис. 2). Максимального значення R набуде у вершині параболи. Тобто максимуму функція доходу досягне при ціні $P = 1$, тоді загальний дохід $TR = 8$.

Задача 2. Щоденний дохід підприємства задано рівнянням $R(P) = -P^2 + 14P - 44$. Знайдіть ціну, яку потрібно встановити підприємству на свою продукцію, щоб максимізувати дохід.

Розв'язання

Графіком заданої залежності є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Максимального значення функція доходу набуває у вершині параболи. Координати вершини параболи $(7; 5)$. Тобто максимум функція досягає за ціни $P = 7$.

Знайдемо значення функції доходу у цій точці: $R(7) = 5$. Отже, щоб отримати максимальний щоденний дохід, підприємству потрібно встановити ціну $P = 7$.

Заняття 18

Тема. ***Функції витрат і доходу***

Мета: ознайомити учнів із функціями витрат та доходу; формувати вміння використовувати ці функції в задачах математичної економіки.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: дохід, витрати, загальний дохід, загальні витрати, ціна, обсяг товару.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття про середні величини

Середні витрати (ATC) — це витрати на одиницю продукції. Середні витрати обчислюються за формулою:

$$ATC = \frac{TC}{Q},$$

де TC — загальні втрати; Q — обсяг продажу.

Існує інший спосіб визначення середніх витрат (ATC):

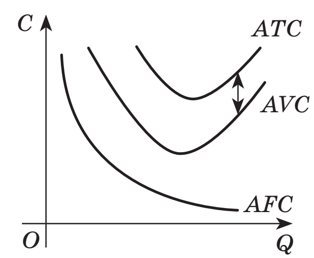
$$ATC = AFC + AVC,$$

де AFC — сума середніх постійних витрат; AVC — сума середніх змінних витрат.

Середні постійні витрати (AFC) та *середні змінні витрати* (AVC) визначаються таким чином:

$$AFC = \frac{FC}{Q}; \ AVC = \frac{VC}{Q}.$$

Побудуємо криві ATC, AFC, AVC (див. рисунок). Криві ATC і AVC мають вигляд параболи, а крива AFC має вигляд гіперболи (оскільки при невеликих обсягах випуску середні постійні витрати є значними, а при зростанні обсягів випуску вони завжди зменшуються).



Середні витрати підприємства

За будь-якого обсягу випуску товару відстань по вертикалі між кривими ATC і AVC дорівнює величині AFC.

Поняття прибутку

Основною метою діяльності будь-якого підприємця є отримання прибутку. При цьому кожен підприємець намагається його максимізувати за умови зведення витрат до мінімуму. Зауважимо, що фірми працюють на конкуруючому ринку. Виходячи з цього, розглянемо деякі поняття.

Прибуток (П) — плата за функції, які виконує підприємець, коли організовує виробництво, керує ним, здійснює інновації та ризикує. Види підприємницької діяльності: виробнича, посередницька (комерційна, фінансова, страхова тощо).

Прибуток (П) обчислюється за формулою:

$$\Pi = TR - TC,$$

TR — загальний дохід; TC — загальні витрати.

Максимізація прибутку для фірми означає знаходження такого способу підприємницької діяльності, при якій різниця між загальним доходом та загальними витратами прямуватиме до максимуму.

Для вирішення проблеми максимізації прибутку важливо враховувати не тільки загальні, але й граничні значення цих показників, тобто значення граничного доходу та граничних витрат.

Поняття граничного доходу, граничних витрат і граничного прибутку

Граничний дохід (гранична виручка) (MR) — додатковий приріст загальної виручки внаслідок випуску додаткової одиниці продукції:

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q},$$

де ΔTR — зміна загального доходу; ΔQ — зміна кількості продукції, що виробляється.

Граничні витрати (MC) — додатковий приріст витрат, пов'язаний із випуском додаткової одиниці продукції:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q},$$

де ΔTC — зміна загальних витрат; ΔQ — зміна кількості продукції, що виробляється.

Граничний прибуток (МП) — додатковий приріст прибутку внаслідок випуску додаткової одиниці продукції:

$$M\Pi = \frac{\Delta \Pi}{\Delta Q},$$

де $\Delta\Pi$ — зміна прибутку; ΔQ — зміна кількості продукції, що виробляється.

Зауважимо, що при збільшенні кількості виробленої продукції на одиницю відбувається збільшення загальних витрат на величину граничних витрат і одночасно зростає загальний дохід на величину граничного доходу.

Фірма отримуватиме прибуток до того часу, поки граничний дохід буде більше, ніж граничні витрати (тобто $MR > MC$). Це означає, що різниця між MR і MC являє собою граничний прибуток ($M\Pi$):

$$M\Pi = MR - MC > 0.$$

Якщо показник $M\Pi > 0$, то це свідчить про те, що кожна додаткова одиниця випуску збільшує загальний обсяг прибутку на певну величину.

Фірмі вигідно збільшувати випуск своєї продукції доти, доки граничний прибуток не стане нульовим (тобто $MR = MC$).

Якщо при збільшенні випуску на одну додаткову одиницю додаткові витрати фірми перевищують її додатковий дохід (тобто $MC > MR$), то граничний прибуток стане від'ємним:

$$M\Pi = MR - MC < 0.$$

У цьому випадку фірма може збільшити свій прибуток за рахунок скорочення кількості випущеної продукції до рівня, при якому $MR = MC$.

Це універсальне правило ринку, яке називають **правилом** $MC = MR$, або $MR = MC$.

Ціна (P) та обсяг (Q) випуску товару, які відповідають даній умові, є *оптимальними*.

Також для конкуруючої фірми правило максимізації прибутку означає вибір такого обсягу виробництва, за якого *граничні витрати дорівнюють ціні*:

$$MC = MR = P.$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Відновіть втрачені дані бухгалтерської звітності (табл. 1), якщо постійні витрати фірми становлять 15 грн.

Розв'язання

За умовою задачі постійні витрати дорівнюють 15 грн, тобто $FC = 15$. Середні постійні витрати обчислюються за формулою $AFC = \frac{FC}{Q}$. Отже, заповнюємо стовпчики FC і AFC табл. 1.

Середні витрати фірми дорівнюють: $ATC = AFC + AVC$. Тоді $AVC = ATC - AFC$. Отже, заповнюємо стовпчик (AVC.

Таблиця 1

Q	*FC*	*AFC*	*VC*	*AVC*	*TC*	*ATC*
0						—
1						25
2						20
3						18
4						22
5						28
6						38

Оскільки $AVC = \frac{VC}{Q}$ і $ATC = \frac{TC}{Q}$, то $VC = AVC \cdot Q$; $TC = ATC \cdot Q$. Заповнюємо стовпчики VC і TC табл. 1.

У результаті отримаємо табл. 2.

Таблиця 2

Q	*FC*	*AFC*	*VC*	*AVC*	*TC*	*ATC*
0	15	—	0	—	15	—
1	15	15	10	10	25	25
2	15	7,5	25	12,5	40	20
3	15	5	39	13	54	18
4	15	3,75	73	18,25	88	22
5	15	3	125	25	140	28
6	15	2,5	213	35,5	228	38

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. За наведеними у табл. 3 даними встановіть, яку комбінацію ціни та обсягів виробництва треба обрати фірмі, щоб отримати найбільший прибуток. Визначте, який при цьому буде прибуток.

Таблиця 3

Ціна *P* (грн)	**Обсяг виробництва *Q* (од.)**	**Загальні витрати на виробництво *TC* (грн)**
100	1	50
120	2	150

Продовження табл. 3

Ціна *P* (грн)	**Обсяг виробництва *Q* (од.)**	**Загальні витрати на виробництво *TC* (грн)**
140	3	300
160	4	520
180	5	850
200	6	1250

Розв'язання

За відомими формулами здійснимо обчислення та складемо табл. 4:

$$\Pi = TR - TC;\ TR(Q) = P \cdot Q;\ MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q};\ MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}.$$

Таблиця 4

P	*Q*	*TC*	*TR*	*MC*	*MR*	*TR–TC*
100	1	50	100	—	—	50
120	2	150	240	100	140	90
140	3	300	420	150	180	120
160	4	520	640	220	220	120
180	5	850	900	330	260	50
200	6	1250	1200	400	300	–50

У табл. 4 знаходимо значення P і Q такі, що $MR = MC$.

Отже, фірмі вигідно продавати 4 од. продукції за ціною 160 грн за кожну. При цьому вона отримає 120 грн прибутку.

Задача 3. Бухгалтер фірми втратив звітну документацію і зміг згадати тільки деякі дані (табл. 5). Відновіть решту даних.

Таблиця 5

Q	*TC*	*VC*	*FC*	*MC*	*ATC*	*AVC*	*AFC*
2	50						
3				20			
4		75					
5			10			17	
6				5			

Розв'язання

За відомими з умови задачі даними обчислюємо невідомі дані за формулами, поданими у табл. 6.

Результати обчислення величини витрат виробництва внесемо у табл. 6.

Таблиця 6

Q	TC	VC	FC	$MC=\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$	$ATC=\frac{TC}{Q}$	$AVC=\frac{VC}{Q}$	$AFC=\frac{FC}{Q}$
2	50	40	10	—	25	20	5
3	70	60	10	20	23,3	20	3,3
4	85	75	10	15	21,3	18,8	2,5
5	95	85	10	10	19	17	2
6	100	90	10	5	16,7	15	1,7

Задача 4. Підприємець володіє кафе «Казка». Постійні витрати становлять 10 500 у. о. на місяць. Середній рахунок, який сплачують відвідувачі, дорівнює 7 у. о., з яких 2,8 у. о. — змінні витрати. 1) Визначте кількість відвідувачів за місяць, яких повинно обслуговувати кафе: а) щоб забезпечити покриття своїх витрат без отримання прибутку; б) щоб мати прибуток у розмірі 4200 у. о. за місяць; в) щоб отримати прибуток у розмірі 4200 у. о. за умови, що вартість обіду зросла до 9 у. о., постійні витрати збільшились до 14 700 у. о. на місяць, а змінні витрати збільшились до 3,75 у. о. на кожну одиницю. 2) Економіст, який працює в кафе, попередив підприємця, що той ризикує втратити 10 % своїх клієнтів, якщо підніме ціну (за законом попиту). Яким у цьому випадку буде прибуток підприємця? 3) Щоб збільшити кількість відвідувачів, підприємець запропонував роботу в своєму кафе співаку із заробітною платою 800 у. о. Цей крок дозволив збільшити кількість відвідувачів до 3450 осіб за місяць. Чи правильно зробив підприємець?

Розв'язання

1) а) Визначимо, скільки відвідувачів на місяць повинно обслуговувати кафе, щоб забезпечити покриття своїх витрат:

$$Q_{\text{беззбитковості}}=\frac{FC}{P_{\text{од}}-VC_{\text{од}}}=\frac{10\,500}{7-2{,}8}=2500 \text{ (відвідувачів за місяць).}$$

б) Щоб мати прибуток 4200 у. о. на місяць, кафе повинно обслуговувати: $Q=\frac{4200+10\,500}{7-2{,}8}=3500$ (відвідувачів за місяць).

в) У разі збільшення постійних і змінних витрат кафе повинно обслуговувати: $Q=\frac{4200+14\,700}{9-3{,}75}=3600$ (відвідувачів за місяць).

Визначимо, скільки відвідувачів за місяць повинно обслуговувати кафе, щоб забезпечити покриття своїх витрат за умови підняття цін: $Q_{\text{беззбитковості нова}}=3500\cdot 0{,}9=3150$ (відвідувачів за місяць).

2) Обчислимо прибуток підприємця після підняття цін у кафе:
$\Pi=TR-TC=P\cdot Q_{\text{нова}}-\left(FC+VC\cdot Q_{\text{нова}}\right)=9\cdot 3150-\left(14\,700+\right.$
$\left.+3{,}75\cdot 3150\right)=1837{,}5$ (у. о.).

3) Обчислимо додатковий дохід кафе від наймання співака:
$\Pi=TR-TC=9\cdot 3450-\left(14\,700+800-3{,}75\cdot 3450\right)=2612{,}5$ (у. о.);
$2612{,}5-1837{,}5=775$ (у. о.).
Таким чином, наймати співака вигідно.

Заняття 19 – 20

Тема. ***Точка беззбитковості***

Мета: ознайомити учнів із характером та особливостями поведінки функцій витрат доходу; формувати вміння визначати точку беззбитковості.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: функція постійних витрат, функція змінних витрат, функція загальних витрат, граничні витрати, середні витрати, граничний дохід, середній дохід.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Аналіз беззбитковості

Точка беззбитковості — це точка, в якій загальні витрати дорівнюють валовому доходу (виручці).

Побудуємо графіки функцій витрат (постійних, змінних, загальних) і графік доходу в одній системі координат (рис. 1).

Будь-яка фірма, працюючи в умовах конкуренції, повинна вирішити для себе такі запитання:

1) чи слід фірмі залишатися в галузі та виробляти продукцію;
2) якщо так, то в якому обсязі випускати товари або надавати послуги;

3) яким чином варто змінювати (збільшувати, зменшувати) обсяги виробництва (надання послуг), щоб отримати максимальний прибуток.

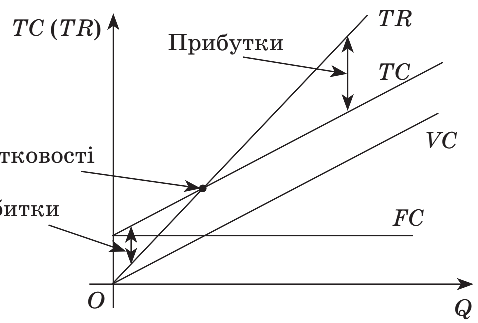


Рис. 1

Рішення про припинення існування фірми підприємець приймає тоді, коли сумарні витрати виробництва перевищують сумарну виручку $(TC > TR)$. Але приймаючи рішення про ліквідацію фірми, підприємець повинен враховувати, що при повному припиненні виробництва його витрати будуть дорівнювати постійним витратам. Тому фірмі необхідно продовжувати виробництво, доки виручка від продажу покриває *всі* змінні витрати $(TR \geqslant VC)$. Якщо ж сумарна виручка менше змінних витрат $(TR < VC)$ за будь-якого обсягу виробництва, то фірма більше втрачає, виробляючи товари, ніж припиняючи виробництво.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо приклад, коли постійні витрати (FC) фірми становлять 15 тис. гр. од. на місяць. Крім того, фірма наймає робітників, купує сировину, використовує електроенергію тощо. Тобто змінні витрати (VC) складають 40 тис. гр. од. Тоді загальні витрати (TC) становлять: $TC = VC + FC = 40 + 15 = 55$ (тис. гр. од.).

Нехай загальна виручка (TR) фірми складає 45 тис. грн од. Оскільки $TR < TC$ $(45 < 55)$, то фірма несе збитки в розмірі 10 тис. гр. од. Але фірмі слід продовжувати виробництво, оскільки за рахунок виручки повністю покриваються змінні витрати (VC) (40 тис. гр. од.) і частина постійних витрат (FC) (5 тис. гр. од.). Якщо ж виручка буде менша за 40 тис. гр. од., тобто змінні витрати (VC) не покриються, а збитки перевищать постійні витрати (FC), то вигідним буде закрити виробництво.

Отже, можна зробити висновок, що *фірма повинна припинити виробництво, якщо сумарна виручка від продажу будь-якого обсягу її продукції не перевищує змінних витрат виробництва цієї кількості товарів і послуг, тобто* $TC < VC$. Причому у випадку, коли всі одиниці товару продаються за однаковою ціною, то обидві частини нерівності можна поділити на величину обсягу виробництва (Q): $TR = \frac{P \cdot Q}{Q}$; $VC = \frac{AVC \cdot Q}{Q}$, тоді отримаємо: $P < AVC$. Тобто фірма повинна припинити виробництво, якщо ціна товару не перевищує середні змінні витрати.

Підіб'ємо підсумки:

1) *умова беззбитковості* конкуруючої фірми досягається, якщо виробляється обсяг продукції, для якого $P = ATC_{\min}$;

2) *умова закриття фірми (універсальне правило ринку)*: $P < AVC_{\min}$;

3) *точка закриття конкуруючої фірми* — це точка, для якої виконується умова: $P = AVC_{\min}$.

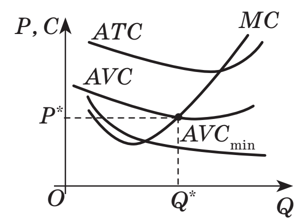


Рис. 2

Наведемо графічне зображення середніх і граничних витрат виробництва фірми у короткостроковому періоді (рис. 2).

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Фірма випускає 100 од. продукції та реалізує їх за ринковою ціною 250 грн за кожну одиницю. Функція загальних витрат фірми має вигляд $TC = Q^2 + 4Q + 1$. Обчисліть прибуток (збитки) фірми.

Розв'язання

Для розрахунку прибутків (збитків) фірми обчислимо загальний дохід і загальні витрати: $TR = P \cdot Q = 250 \cdot 100 = 25\,000$ (грн); $TC = 100^2 + 4 \cdot 100 + 1 = 10\,401$ (грн); $\Pi = TR - TC = 25\,000 - 10\,401 = 14\,599$ (грн).

Отже, фірма отримує прибуток у розмірі 14 599 грн.

Задача 2. Підприємець надає послугу за 2,4 грн. Змінні витрати становлять 2,16 грн за 1 од. послуги, а постійні витрати — 3600 грн за 1 од. Знайдіть кількість послуг, при якій підприємець не матиме ані прибутків, ані збитків.

Розв'язання

Запишемо умову беззбитковості: $TR = TC$. З цієї формули визначимо точку беззбитковості: $P \cdot Q = FC + VC$; $2{,}4 \cdot Q = 3600 + 2{,}16 \cdot Q$, звідки $Q = 15\,000$ (од.).

Тобто підприємець не матиме ані прибутків, ані збитків за умови надання 15 000 послуг. Таку кількість послуг називають *пороговою*.

Задача 3. Ціна одиниці продукції фірми дорівнює 8 грн. Аналітичний відділ склав функцію витрат фірми: $15 + Q^2$, де Q — обсяг випуску продукції $(Q > 0)$. За якого обсягу випуску продукції фірма нестиме збитки, а за якого обсягу матиме прибуток?

Розв'язання

Фірма нестиме збитки, якщо її витрати на випуск даної продукції будуть більшими за вартість цієї продукції (рис. 3), тобто:

$15 + Q^2 > 8 \cdot Q$, звідки $(Q-3)(Q-5) > 0$.

Якщо обсяг продукції $0 < Q < 3$ і $Q > 5$, то фірма нестиме збитки, а якщо $3 < Q < 5$, то фірма матиме прибуток.

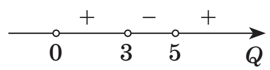


Рис. 3

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 4. Фірма функціонує на конкуруючому ринку. На цьому ринку встановились рівноважні параметри $P = 25$ (у. о.) і $Q = 2{,}7$ (од.). Функція загальних витрат на виробництво продукції цієї фірми має вигляд $TC = 5 \cdot Q^3 - 20 \cdot Q^2 + 25 \cdot Q + 30$, причому функція AVC досягає мінімального значення за обсягу продажу на рівні 2 од. Визначте величину прибутку та ціну товару, за якої фірма повинна припинити виробництво. Відповідь проілюструйте графічно.

Розв'язання

Обчислимо прибуток за формулою:

$$\Pi = TR - TC = 25 \cdot 2{,}7 - \left(5 \cdot 2{,}7^3 - 20 \cdot 2{,}7^2 + 25 \cdot 2{,}7 + 30\right) = 17{,}4 \text{ (у. о.)}.$$

Побудуємо графік (рис. 4).

Фірма має зупинити виробництво у разі, якщо $P = \min AVC$.

Визначимо AVC: $AVC = \dfrac{VC}{Q}$; $AV! = \dfrac{5 \cdot Q^3 - 20 \cdot Q^2 + 25 \cdot Q}{Q} = 5 \cdot Q^2 - 20 \cdot Q + 25$. За умовою задачі функція AVC набуватиме мінімального значення при $Q = 2$. Тоді $P = \min AVC = 5 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 25 = 5$.

Таким чином, фірма має зупинити виробництво, коли на ринку ціна її товару буде нижчою за 5 у. о. (рис. 5).

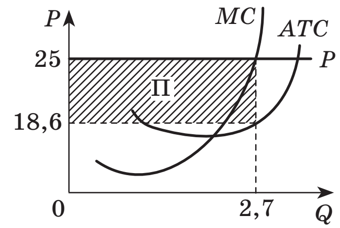


Рис. 4

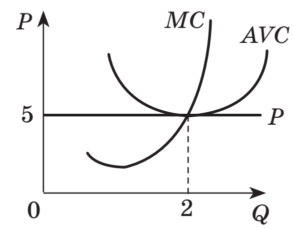


Рис. 5

Задача 5. Заповніть пропущені в табл. 1 дані. Оцініть становище, в якому перебуває фірма (знайдіть величину прибутків, збитків тощо). Що треба зробити фірмі в умовах, що склались (нарощувати або зменшувати виробництво, закрити фірму, нічого не робити)?

Таблиця 1

P	*Q*	*TR*	*TC*	*FC*	*VC*	*ATC*	*AFC*	*AVC*
20	200			3000	12 000			

Розв'язання

Використовуючи дані табл. 1 і відомі формули, отримуємо табл. 2:

Таблиця 2

P	*Q*	*TR*	*TC*	*FC*	*VC*	*ATC*	*AFC*	*AVC*
20	200	4000	15 000	3000	12 000	75	15	60

З табл. 2 видно, що $TR < TC$. Отже, $\Pi = TR - TC = 4000 - 15\,000 = -11\,000$ (у. о.). Тобто фірма несе збитки у розмірі 11 000 у. о.

Фірма повинна закритися, оскільки $P < AVC$ (з табл. 2) і оскільки збитки за умови випуску 200 од. більші, ніж збитки у разі, якщо фірма зупинить виробництво (останні дорівнюють величині постійних витрат $FC = 3000$).

Задача 6. Фірма виробляє щомісяця 100 деталей і кожну продає за 30 грн. Сукупні витрати фірми при цьому складають 6 тис. грн, сукупні постійні витрати — 2 тис. грн, граничні витрати — 50 грн. Що має зробити фірма (збільшити виробництво, скоротити виробництво, залишити обсяг випуску продукції без змін, припинити виробництво)?

Розв'язання

За умовою задачі: $Q = 100$ деталей; $P = 30$ грн; $TC = 6000$ грн; $FC = 2000$ грн; $MC = 30$ грн.

Оскільки $MC = P = 30$, то обсяг виробництва є оптимальним (згідно із правилом максимізації прибутку).

Визначимо, що треба робити фірмі в даних умовах:

$$VC = TC - FC = 6000 - 2000 = 4000 \text{ (грн)}; \ AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{4000}{100} = 40 \text{ (грн)}.$$

$P < AVC$, отже, фірмі слід припинити виробництво.

Контрольні запитання до теми 1

1. Дайте означення задачі економічного змісту.
2. Сформулюйте означення моделі та математичного моделювання.
3. Назвіть етапи розв'язування прикладної задачі.
4. Охарактеризуйте етапи розв'язування задачі економічного змісту.
5. Чи відрізняються поняття «попит» та «величина попиту»? Якщо так, то чим?
6. Чи відрізняються поняття «пропозиція» та «величина пропозиції»? Якщо так, то чим?
7. Яка особливість побудови графіків в економіці?
8. Сформулюйте закон попиту та закон пропозиції.
9. Запишіть рівняння функції попиту та рівняння функції пропозиції. Побудуйте їхні графіки.
10. Як визначити точку рівноваги? Як визначити ціну? обсяг продажу? Запропонуйте графічний та аналітичний способи.
11. Наведіть приклад моделі економічної події або явища.
12. Що відбудеться на ринку деякого товару, якщо держава встановить фіксовану ціну цього товару? Відповідь подайте в аналітичному вигляді.
13. Які міри впливу держави на цінову політику країни ви знаєте?
14. Якими можуть бути наслідки втручання держави у політику ціноутворення?
15. Як розподіляється податковий тягар між продавцем та покупцем? Побудуйте графік та запишіть відповідні формули.
16. Як зміщуватимуться графіки функції попиту та функції пропозиції деякого товару під впливом різних нецінових факторів (наприклад, після надання субсидії, введення податку тощо)?

17. Дайте означення еластичності.
18. Назвіть види еластичності, побудуйте відповідні графіки.
19. Якою є залежність між обсягом продажу та еластичністю попиту?
20. Запишіть рівняння функції доходу та функції витрат. Побудуйте їхні графіки.
21. Що таке точка беззбитковості?
22. Як визначити точку беззбитковості (графічно та аналітично)? Визначте проміжки прибутків і збитків.

ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ

Заняття 21–22

Тема. ***Функції витрат і доходу залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги***

Мета: ознайомити учнів із залежністю беззбитковості від тангенса кута нахилу цінової та доходної функцій; формувати вміння знаходити параметри беззбитковості.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: беззбитковість, тангенс кута нахилу прямої, функція доходу (рівняння та графік), функція витрат (рівняння та графік), функція попиту (рівняння та графік), функція пропозиції (рівняння та графік).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Графік функції доходу

Якщо функція витрат залишається незмінною, то при збільшенні кута нахилу функції доходу до осі абсцис (тангенс кута також збільшується) зменшується рівноважний обсяг продукції, тобто $Q\downarrow$, і навпаки (рис. 1).

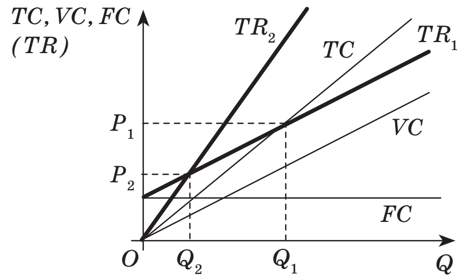


Рис. 1. Зміна кута нахилу функції доходу

Графік функції витрат

Якщо функція доходу залишається незмінною, то при збільшенні кута нахилу функції витрат до осі абсцис рівноважний обсяг продукції збільшується, тобто $Q\uparrow$, і навпаки (рис. 2).

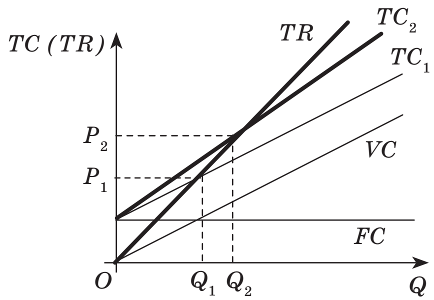


Рис. 2. Зміна кута нахилу функції витрат

Зазначимо, що постійні витрати не впливають на кут нахилу функції витрат, але впливають на параметри точки беззбитковості. При збільшенні (зменшенні) постійних витрат відповідно збільшується (зменшується) рівноважний обсяг продукції (див. рис. 2).

Поняття бюджетного обмеження

Бажання споживача безмежні, але можливості обмежені. Зокрема, споживач може змінювати набір товарів споживання в межах свого бюджетного обмеження. Бюджетне обмеження споживача формується цінами на товари та послуги та його доходом.

Лінія бюджетного обмеження (бюджетна пряма, бюджетна лінія) показує різні комбінації двох товарів (X і Y), які можна

купити за незмінного грошового доходу та даних цін на товар. (Дохід витрачається повністю.)

У загальному випадку бюджетне обмеження має вигляд:

$$I = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y,$$

де I — дохід споживача; P_X, P_Y — ціни на товари X і Y відповідно.

Рівняння бюджетної прямої має вигляд:

$$Y = \frac{I - P_X \cdot X}{P_Y}.$$

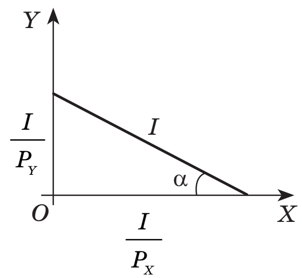


Рис. 3. Бюджетна лінія

Бюджетна лінія (рис. 3) має від'ємний нахил до осі X: $\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)$, оскільки збільшення купівлі одного товару можливо тільки за рахунок зменшення купівлі іншого. Величина $\frac{P_X}{P_Y} = \operatorname{tg}\alpha$ показує кількість товару Y, від якої споживач повинен відмовитися для придбання додаткової одиниці товару X.

Чим крутіша бюджетна лінія, тим більше відношення ціни товару X до ціни товару Y і тим більшою кількістю товару Y необхідно пожертвувати для одержання додаткової одиниці товару X.

Бюджетна лінія перетинає осі координат в точках $X = \frac{I}{P_X}$ і $Y = \frac{I}{P_Y}$, які показують максимально можливі кількості товарів X і Y, що можна купити на даний дохід при даних цінах. При зміні ціни товару змінюється нахил бюджетної лінії. При зміні доходу та постійних цінах бюджетна лінія зсувається паралельно вгору або вниз.

Розглянемо варіанти бюджетної лінії.

Якщо дохід знизиться при незмінних цінах, то бюджетна лінія зсунеться вліво (рис. 4), тобто купівельна спроможність споживача знизиться — споживач зможе купити менше товарів.

Якщо дохід збільшиться при незмінних цінах, то бюджетна лінія зсунеться вправо (рис. 5), тобто купівельна спроможність споживача зросте.

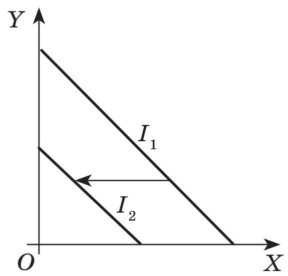


Рис. 4

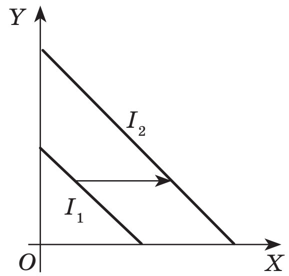


Рис. 5

Якщо доходи і ціни змінюються однаково (пропорційно), то бюджетна лінія залишається незмінною.

Якщо ціна на товар X знизиться, то бюджетна лінія змінить кут нахилу як показано на рис. 6.

Якщо ціна на товар Y знизиться, то бюджетна лінія змінить кут нахилу як показано на рис. 7.

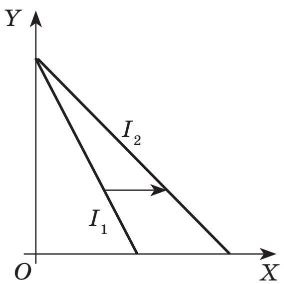


Рис. 6

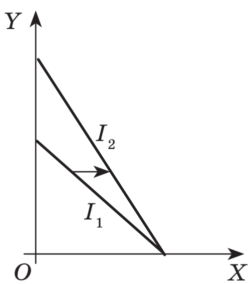


Рис. 7

Якщо ціна на товар X зросте, то бюджетна лінія змінить кут нахилу як показано на рис. 8.

Якщо ціна на товар Y зросте, то бюджетна лінія змінить кут нахилу як показано на рис. 9.

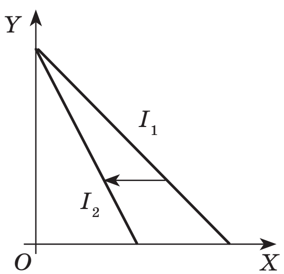


Рис. 8

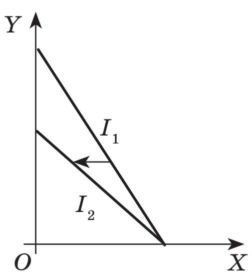


Рис. 9

Таким чином, зміна доходів і цін змінює положення бюджетної лінії.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Підприємець планує налагодити виробництво продукції. Очікується, що виручка від реалізації одного виробу складе 30 грн. Для виробництва товарів необхідно закупити та встановити обладнання на суму 240 тис. грн. При цьому витрати на випуск одного виробу становитимуть 22,5 грн (собівартість продукції). Визначте кількість виробів, яку потрібно випустити, щоб покрити початкові витрати. Визначте мінімальний кредит, який потрібно взяти, щоб виробництво почало працювати, якщо підприємство випускатиме 20 000 виробів на місяць. Визначте, як зміняться параметри рівноваги, якщо після започаткування підприємцем власного виробництва реальна собівартість одного виробу становитиме 28 грн.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Нехай Q — кількість продукції, що виробляє підприємство. Тоді функція загального доходу має вигляд: $TR(Q) = P \cdot Q$, де P — ціна одного виробу. Звідси $TR(Q) = 30 \cdot Q$.

Запишемо функцію витрат: $TC(Q) = FC + VC$, де TC — загальні витрати; FC — постійні витрати; VC — змінні витрати. Крім того, $VC = P' \cdot Q$, де P' — собівартість продукції.

Підставимо відомі з умови задачі дані у рівняння: $TC(Q) = 240\,000 + 22{,}5 \cdot Q$.

Побудуємо графіки функцій витрат і доходів в одній системі координат (рис. 10).

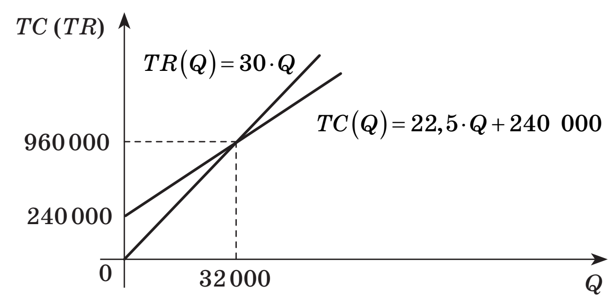


Рис. 10

Для започаткування власної справи підприємцю необхідно закупити обладнання, тобто потрібно: $TC(0)=240\,000$ (грн).

Якщо компанія випускатиме 20 000 виробів на місяць, то: $TR(20\,000)=30\cdot 20\,000=600\,000$ (грн). Отже, перші місяці підприємство буде збитковим.

Визначимо точку рівноваги: $TR(Q)=TC(Q)$; $30\cdot Q=22{,}5\cdot Q+$ $+240\,000$; $7{,}5Q=240\,000$; $Q=32\,000$ (виробів).

Тоді $TC(Q)=30\cdot 32\,000=960\,000$ (грн).

Отже, для започаткування власної справи підприємцю потрібно взяти кредит у розмірі 960 000 грн. Щоб покрити початкові витрати, необхідно випустити 32 000 виробів.

У разі зменшення собівартості продукції зміниться вигляд функції витрат: $TC=28\cdot Q+240\,000$.

Тоді зміняться і параметри рівноваги: $TC(Q)=TR(Q)$.

$30\cdot Q=28\cdot Q+240\,000$; $2\cdot Q=240\,000$; $Q=120\,000$.

Звідси $TC=TR=3\,600\,000$ (грн) (рис. 11).

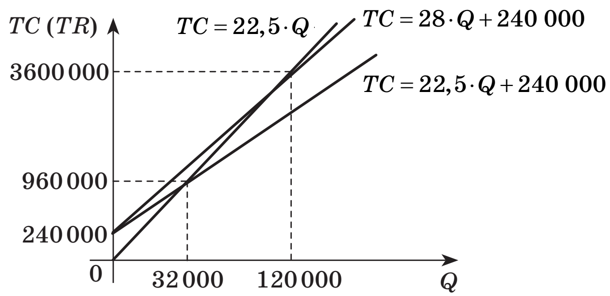


Рис. 11

Задача 2. Ціна товару X дорівнює 2 грн за кожну одиницю, а ціна товару Y становить 5 грн за кожну одиницю. Запишіть рівняння бюджетної лінії та побудуйте її, якщо: 1) дохід споживача дорівнює 150 грн; 2) дохід споживача збільшився на 10 % (по відношенню до початкового значення доходу); 3) дохід споживача зменшився на 20 % (по відношенню до початкового значення доходу); 4) ціна товару X зменшилась до 1,5 грн за кожну одиницю при доході споживача 150 грн; 5) ціна товару Y збільшилась до 8 грн за кожну одиницю, ціна товару X становить 2 грн, а дохід споживача становить 150 грн.

Розв'язання

1) Якщо дохід споживача дорівнює 150 грн, то $I_1=150$. Запишемо рівняння бюджетної лінії для даного випадку: $Y_1=\dfrac{I_1-P_X\cdot X}{P_Y}$;

$$Y_1=\frac{150-2\cdot X}{5}=30-\frac{2}{5}X.$$

2) Якщо дохід збільшився на 10 %, то $I_2=1{,}1\cdot I_1=165$. Запишемо рівняння бюджетної лінії для даного випадку: $Y_2=\dfrac{I_2-P_X\cdot X}{P_Y}$;

$$Y_2=\frac{165-2\cdot X}{5}=33-\frac{2}{5}X.$$

3) Якщо дохід споживача зменшився на 20 %, то $I_3=0{,}8\cdot I_1=120$. Запишемо рівняння бюджетної лінії для даного випадку: $Y_3=\dfrac{I_3-P_X\cdot X}{P_Y}$; $Y_3=\dfrac{120-2\cdot X}{5}=24-\dfrac{2}{5}X$.

4) Якщо ціна товару X зменшилася до 1,5 грн за одиницю при доході споживача 150 грн, то рівняння бюджетної лінії матиме вигляд: $Y_4=\dfrac{150-1{,}5\cdot X}{5}=30-0{,}3X$.

5) Якщо ціна за 1 од. товару Y збільшилася до 8 грн, ціна за 1 од. товару X дорівнює 2 грн, а дохід споживача становить 150 грн, то рівняння бюджетної лінії матиме вигляд: $Y_5=\dfrac{150-2\cdot X}{8}=18{,}75-0{,}25X$.

Побудуємо знайдені рівняння бюджетної лінії (рис. 12).

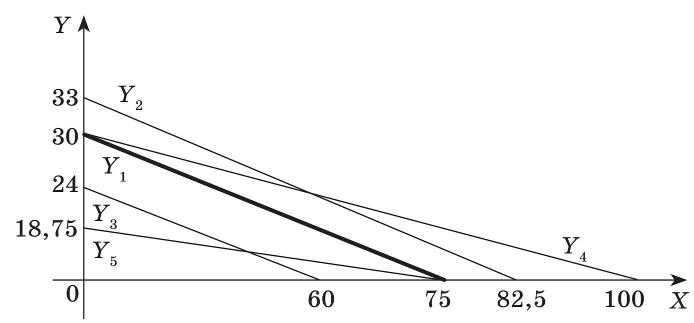


Рис. 12

Із рис. 12 видно, що кутові коефіцієнти бюджетних ліній Y_1, Y_2 і Y_3 однакові, тому відбулось паралельне перенесення прямої Y_1 вправо та вліво.

Заняття 23–25

Тема. ***Функції попиту та пропозиції залежно від зміни тангенса кута їх нахилу. Точка рівноваги***

Мета: ознайомити учнів із залежністю ринкової рівноваги від тангенса кута нахилу функцій попиту та пропозиції; формувати вміння їх встановлювати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: функція попиту (рівняння та графік), функція пропозиції (рівняння та графік), тангенс кута та його властивості, еластичність попиту за ціною, еластичність пропозиції за ціною.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Зазначимо, що кутовий коефіцієнт лінійної функції попиту є від'ємним ($Q_D = a - bP$, де $-b$ — кутовий коефіцієнт), а лінійної функції пропозиції — додатним ($Q_S = c + dP$, де d — кутовий коефіцієнт). Отже, справджуються такі залежності:

— *закон попиту*: чим вища ціна, тим менший обсяг попиту, і навпаки;

— *закон пропозиції*: чим вища ціна, тим більший обсяг пропозиції, і навпаки.

Тобто зміна кута нахилу функції попиту (функції пропозиції) приводить до відповідних змін ціни та обсягу продажу.

Крім того, звернемо увагу і на зміну еластичності попиту (еластичності пропозиції) за ціною залежно від кута нахилу функції попиту (функції пропозиції).

Пригадаємо відомості щодо еластичності попиту за ціною та еластичності пропозиції за ціною.

Еластичність попиту за ціною дорівнює:

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = -b\frac{P}{Q},$$

де $-b$ — кутовий коефіцієнт прямої.

Еластичність пропозиції за ціною дорівнює:

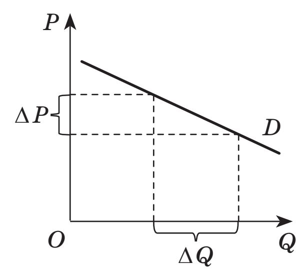
$$E_S = \frac{\Delta Q_S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_S} = d\frac{O}{Q_S},$$

де d — коефіцієнт, який визначає кут нахилу кривої пропозиції.

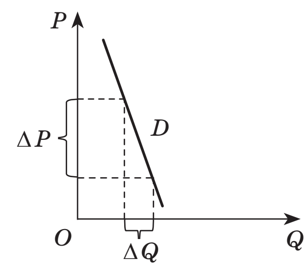
Розглянемо графічно зміну еластичності попиту за ціною залежно від зміни кута нахилу функції попиту (рис. 1).

Нехай невелика зміна в ціні приводить до значної зміни кількості проданої продукції $(\Delta P < \Delta Q)$, тобто попит є *еластичним*.

Зменшимо кут нахилу функції попиту до осі абсцис. Тоді значна зміна в ціні приводитиме до незначної зміни кількості проданої продукції $(\Delta Q < \Delta P)$, тобто такий попит є *нееластичним*.



Еластичний попит

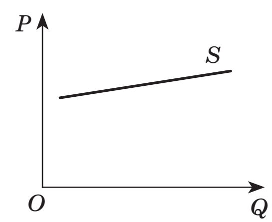


Нееластичний попит

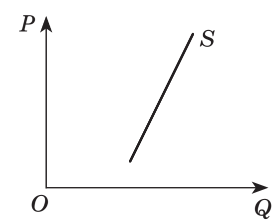
Рис. 1

Отже, чим меншим є кут нахилу функції попиту (чим меншим є кутовий коефіцієнт), тим менш еластичним є попит.

Зміну еластичності пропозиції за ціною залежно від зміни кута нахилу функції пропозиції можна визначити шляхом аналогічних міркувань. У результаті цих міркувань отримаємо, що чим меншим є кут нахилу функції пропозиції, тим більш еластичною є пропозиція (і тим більшим є кутовий коефіцієнт) (рис. 2).



Еластична пропозиція



Нееластична пропозиція

Рис. 2

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. При збільшенні ціни на товар A з 3 до 4 грн за кожну одиницю величина попиту на цей товар зменшилася з 9 до 6 од. При збільшенні ціни на товар B з 6 до 7 грн за кожну одиницю величина попиту на цей товар зменшилася з 4 до 3 од. 1) Визначте коефіцієнти еластичності за ціною товару A і товару B перед початком змін. 2) Запишіть рівняння попиту на товар A і на товар B, побудуйте їх графіки. 3) Зробіть висновки щодо еластичності та кута нахилу функцій попиту на товар A і на товар B.

Розв'язання

1) Оскільки в умові задачі не вказано, за якою ціною товару A необхідно обчислити коефіцієнт еластичності, застосуємо формулу дугової еластичності: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} = \frac{6-9}{4-3} \cdot \frac{3,5}{7,5} = -\frac{7}{5}$.

$\left| E_D \right| > 1$, отже, попит на товар A є еластичним.

Аналогічно знайдемо коефіцієнт еластичності товару B за формулою дугової еластичності: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} = \frac{3-4}{7-6} \cdot \frac{6,5}{3,5} = -\frac{13}{5}$.

$\left| E_D \right| > 1$, отже, попит на товар B є еластичним.

2) Складемо рівняння попиту на товар A. Із рівняння еластичності попиту за ціною: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{Q}{P} = -b\frac{P}{Q}$; $-1 = -b$, звідси $b = 1$. Знайдемо a: $Q_D = a - bP$; $9 = a - 1 \cdot 3$; $a = 12$. Отже, рівняння попиту на товар A має вигляд: $Q_{D_1} = 12 - P$.

Складемо рівняння попиту на товар B. Із рівняння еластичності попиту за ціною: $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = -b\frac{P}{Q}$; $-\frac{3}{2} = -b\frac{6}{4}$, звідси $b = 1$.

Знайдемо a: $Q_D = a - bP$; $4 = a - 1 \cdot 6$; $a = 10$.

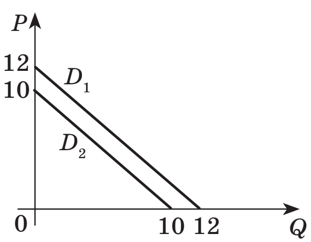


Рис. 3

Отже, рівняння попиту на товар B має вигляд: $Q_{D_2} = 10 - P$.

Побудуємо графіки функцій попиту на товар A і на товар B (рис. 3).

3) Із рис. 3 видно, що функції на товари A і B мають однаковий кут нахилу, тому обидва товари однаково чутливі до зміни ціни.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. У результаті зменшення ціни на товар X з 5 до 4 грн за кожну одиницю обсяг його пропозиції зменшився з 20 до 14 од. У результаті збільшення ціни на товар Y з 4 до 6 грн за кожну одиницю обсяг його пропозиції збільшився з 10 до 16 од. 1) Знайдіть коефіцієнти еластичності пропозиції на товар X і на товар Y за умови, якщо ціна за кожну одиницю становить 4 грн. 2) Проаналізуйте відмінності функцій пропозицій на товар X і на товар Y за кутовим коефіцієнтом, побудуйте графіки функцій.

Розв'язання

1) Знайдемо коефіцієнт еластичності пропозиції на товар X за ціною 4 грн за одиницю: $E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{14-20}{4-5} \cdot \frac{4}{14} = \frac{12}{7}$.

$\left| E_S \right| > 1$, отже, пропозиція еластична. Оскільки $E_S = d\frac{P}{Q}$, то $d = 6$.

Тоді з функції пропозиції: $c = Q_S - dP = 14 - 6 \cdot 4 = -10$. Запишемо рівняння функції пропозиції на товар X: $Q_{S1} = -10 + 6P$.

Знайдемо коефіцієнт еластичності пропозиції на товар Y за ціною 4 грн за одиницю: $E_S = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{16-10}{6-4} \cdot \frac{4}{10} = 1,2$. $\left| E_S \right| > 1$, отже, пропозиція еластична. Оскільки $E_S = d\frac{P}{Q}$, то $d = 3$. Тоді з функції пропозиції: $c = Q_S - dP = 10 - 3 \cdot 4 = -2$. Запишемо рівняння функції пропозиції на товар Y: $Q_{S2} = -2 + 3P$.

2) Побудуємо графіки функцій пропозиції на товар X і на товар Y (рис. 4).

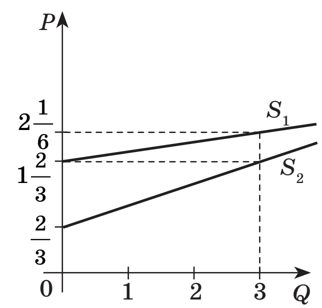


Рис. 4

Кутовий коефіцієнт функції пропозиції на товар X дорівнює 6, на товар Y становить 3. Тобто пропозиція на товар X є більш еластичною, ніж пропозиція на товар Y $(6 > 3)$.

Задача 3. Маркетинговий відділ підприємства провів дослідження. У результаті було виявлено, що графік лінійної функції попиту $(Q_D = a - bP)$ на продукцію підприємства утворює кут $135°$ із додатним напрямком осі абсцис. Виходячи з цього дослідження, маркетинговий відділ рекомендував побудувати графік лінійної функції пропозиції $\left(Q_S = c + dP\right)$ під кутом $45°$ до додатного напрямку осі абсцис. Через півроку держава увела податок на одиницю продукції підприємства в розмірі 10 грн.

У стані рівноваги на ринку підприємство може реалізувати 1 тис. од. продукції за ціною 20 грн за кожну одиницю. Запишіть рівняння попиту та рівняння пропозиції до введення податку та після втручання держави. Визначте рівноважну ціну та обсяг продажу після введення податку. Прокоментуйте зміну кутових коефіцієнтів та відповідні зміни графіків функцій попиту та пропозиції.

Розв'язання

Запишемо рівняння попиту: $Q_D = a - bP$. За умовою задачі кут нахилу графіка функції попиту до додатного напрямку осі абсцис становить $135°$. Тоді $\operatorname{tg}135° = \operatorname{tg}\left(180° - 45°\right) = -\operatorname{tg}45° = -1$. Тобто $Q_d = a - P$.

Підставимо до рівняння попиту дані рівноваги до введення податку: $P = 20$; $Q = 1000$. Отримаємо: $1000 = a - 20$; $a = 1020$. Отже, рівняння попиту до введення податку має вигляд: $Q_D = 1020 - P$.

Запишемо рівняння пропозиції: $Q_S = c + dP$. За умовою задачі рекомендований кут нахилу графіка функції пропозиції дорівнює $45°$. Тоді $\operatorname{tg}45° = 1$.

Підставимо до рівняння пропозиції дані рівноваги до введення податку: $P = 20$; $Q = 1000$. Отримаємо: $1000 = c + 20$; $c = 980$; $Q_S = 980 + P$.

Знайдемо рівняння пропозиції після введення податку (рівняння попиту не зміниться, оскільки податок є неціновим фактором пропозиції і впливає лише на рівняння пропозиції): $Q_S = 980 + \left(P - 10\right)$, тоді $P_1 = 25$. Звідси $Q_1 = 995$.

Отже, нова рівноважна ціна $\left(P_1\right)$ дорівнює 25 грн, а новий обсяг продажу $\left(Q_1\right)$ становить 995 од.

Ціна рівноваги збільшилась, обсяг продажу зменшився, проте кутові коефіцієнти рівнянь попиту та пропозиції при цьому не змінились (графік функції пропозиції змістився паралельно вліво).

Контрольні запитання до теми 2

1. Як зміниться обсяг продажу, якщо кут нахилу функції доходу збільшиться (зменшиться)?
2. Як зміниться обсяг продажу, якщо кут нахилу функції витрат збільшиться (зменшиться)?

3. Як зміниться обсяг продажу, якщо кут нахилу функції попиту збільшиться (зменшиться)?
4. Як зміниться обсяг продажу, якщо кут нахилу функції пропозиції збільшиться (зменшиться)?
5. Складіть і розв'яжіть власну задачу на визначення параметрів функцій попиту (пропозиції, доходу, витрат) залежно від зміни кута нахилу відповідних функцій.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Заняття 26

Тема. ***Простий відсоток. Поточна та майбутня вартості грошей***

Мета: ознайомити учнів із поняттями та формулами обчислення простого відсотка, поточної та майбутньої вартостей грошей.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: простий відсоток (з курсу алгебри 9 класу).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

В економічній літературі дається різна назва тих самих понять. Наприклад, кількість позичених (вкладених) грошей називають *початковим капіталом, початковою вартістю, основною сумою, поточною вартістю, початковою сумою* тощо. Позначимо ці поняття через P. Через визначений проміжок часу особа, яка позичила, повинна сплатити початковий капітал (P) і прибуток з капіталу (I): $P + I$. *Прибуток з капіталу* обчислюється у вигляді відсотків, які нараховуються на початковий капітал. Такі відсотки називають *відсотковою ставкою (процентною ставкою, річною ставкою)* і позначають символом r. Тривалість кредиту, або термін вкладу, визначається в роках та позначається символом t.

Позикодавець після закінчення терміну вкладу повинен отримати основну суму та прибуток з капіталу, що становитиме загальну суму, або, інакше кажучи, *майбутню вартість* (S).

Одним із методів обчислення прибутку є *метод простих відсотків*. Суть цього методу полягає в тому, що відсотки нараховуються на незмінну величину початкової суми протягом всього терміну вкладу.

Є два способи, за допомогою яких можна обчислити відсотки за методом простих відсотків (у подальшому називатимемо цю дію *обчисленням простих відсотків*):

1) $S=P+I$, де S — майбутня вартість; P — початковий капітал; I — прибуток з капіталу ($I=Prt$, де r — відсоткова ставка; t — термін вкладу);

2) $S=P(1+rt)$, де S — майбутня вартість; P — початковий капітал; r — відсоткова ставка; t — термін вкладу).

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Інвестор дав позику 10 000 грн асоціації підприємців на 6 місяців зі ставкою відсотка 24 % річних. Визначте прибуток з капіталу; загальну суму двома способами.

Розв'язання

За умовою задачі $P=10\,000$ грн; $r=0{,}24$; $t=0{,}5$ року. Визначимо прибуток з капіталу: $I=\Pr t=10\,000\cdot 0{,}24\cdot 0{,}5=1200$ (грн).

Обчислимо загальну суму двома способами:

1 спосіб: $S=P+I=10\,000+1200=11\,200$ (грн);

2 спосіб: $S=P(1+rt)=10\,000(1+0{,}24\cdot 0{,}5)=11\,200$ (грн).

Задача 2. Річна ставка за вкладом становить 21 %. Яку суму треба вкласти, щоб отримати через 2 роки з моменту внеску майбутню вартість у розмірі 10 000 грн?

Розв'язання

З формули обчислення простих відсотків визначимо початкову суму: $P=\dfrac{S}{1+rt}=\dfrac{10\,000}{1+0{,}21\cdot 2}=7042{,}2535\approx 7042{,}25$ (грн).

При здійсненні фінансових операцій прийнято робити округлення до сотих. Будемо дотримуватись цього принципу.

Таким чином, початкова сума повинна становити приблизно 7042,25 грн.

Задача 3. Обчисліть простий відсоток за позикою у розмірі 3000 грн, взятою на 5 місяців під 18 % річних.

Розв'язання

Визначимо простий відсоток за позикою:

$$S=P(1+rt)=3000\left(1+0{,}18\cdot\frac{5}{12}\right)=3225 \text{ (грн).}$$

Тобто за заданих умов через 5 місяців боржник повинен сплатити 3225 грн.

Задача 4. Знайдіть величину прибутку та майбутню вартість, якщо початковий капітал у розмірі 5000 грн дали в борг на 100 днів під 8 % річних.

Розв'язання

Обчислимо величину прибутку:

$$S=P(1+rt)=5000\left(1+0{,}08\cdot\frac{100}{365}\right)\approx 5109{,}59 \text{ (грн).}$$

Знайдемо майбутню вартість:

$$I=Prt=5000\cdot 0{,}08\cdot\frac{100}{365}=109{,}59 \text{ (грн).}$$

Отже, величина прибутку становитиме 109,59 грн, майбутня вартість дорівнюватиме 5109,59 грн.

Задача 5. Через скільки років величина початкового капіталу подвоїться, якщо річна ставка становить 25 %?

Розв'язання

За умовою задачі $S=2P$. Тобто $2P=P(1+rt)$; $2=1+0{,}25\cdot t$; $t=4$ (роки).

Отже, за заданого розміру річної ставки величина початкового капіталу подвоїться через 4 роки.

Заняття 27–28

Тема. ***Позика***

Мета: ознайомити учнів із поняттями векселя, дисконту; формувати вміння встановлювати дату погашення векселя, обчислювати дисконт і визначати виручену суму.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: позика, простий відсоток, прибуток з капіталу, термін вкладу.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Оформлення грошових угод між партнерами може відбуватися за допомогою *векселя*. Тобто вексель є письмовим зобов'язанням однієї зі сторін угоди заплатити визначену в документі суму грошей у встановлений термін. Дату, коли гроші повинні бути виплачені, називають *датою погашення*. Суму грошей, яку повинні сплатити, називають *сумою погашення* (S).

Дисконтування — зменшення суми грошей (суми боргу, рахунку) з будь-якої причини. *Дисконт* (D) — величина грошей, яка вираховується з суми погашення боргу, якщо вексель переоформлюється раніше дати його погашення.

Дисконт (D) розраховується за формулою:

$$D = Sdt,$$

де S — сума погашення; d — норма дисконту за певний період; t — тривалість періоду часу в роках.

Інакше дисконт називають *простим дисконтом* або *банківським дисконтом*.

Норма дисконту за певний період (d) — відношення дисконту за цей період до суми погашення, яка виражається у відсотках або еквівалентних їм десяткових дробах. Зазвичай норма дисконту обчислюється за рік.

Різницю між сумою погашення (S) та дисконтом (D) називають *вирученою сумою або виручкою* (P): $P = S - D = S(1 - dt)$.

Іноді буває необхідно визначити термін дії угоди, якщо решту умов задано.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Встановіть дату погашення 60-денного векселя, який датований 17 липня 2011 року.

Розв'язання

17 липня є 198-м днем року. Додавши 60 днів, отримаємо 258-й день року. 258-м днем року є 15 вересня. Отже, 15 вересня 2011 року є датою погашення векселя.

Задача 2. Іванов отримав від Сидорова вексель на суму 30 000 грн, який має бути погашеним через 6 місяців. Одразу після отримання векселя Іванов продав цей вексель Петрову за 25 000 грн. Чому дорівнюють дисконт і норма дисконту в даному випадку?

Розв'язання

Дисконт дорівнює: $D = S - P = 30\,000 - 25\,000 = 5000$ (грн).

З формули дисконту $D = Sdt$ отримаємо $d = \frac{D}{S \cdot t} = \frac{5000}{30\,000 \cdot 0,5} \approx 0,33$.

Норма дисконту становить 33 %, а дисконт дорівнює 5000 грн.

Задача 3. Підприємець взяв позику на 1 рік і дав банку вексель на 10 000 грн. Норма дисконту становить 12 % річних. Знайдіть дисконт і виручену суму, яку банк отримає при перепродажі даного векселя.

Розв'язання

За формулою дисконту: $D = Sdt = 10\,000 \cdot 0,12 \cdot 1 = 1200$ (грн). Таким чином, банк отримає $10\,000 - 1200 = 8800$ (грн) виручки.

Задача 4. Вексель на суму 10 375 грн був проданий банку. Цей вексель повинен був бути погашеним через 90 днів; у банку встановлена норма дисконту на рівні 15 %. Якою буде виручена сума?

Розв'язання

Знайдемо дисконт: $D = Sdt = 10375 \cdot 0,15 \cdot \frac{90}{365} \approx 383,73$ (грн).

Тоді виручена сума дорівнюватиме:
$P = S - D = 10\,375 - 383,73 = 9991,27$ (грн).

Задача 5. Підприємець планує взяти позику в банку на півроку. Яку суму повинен просити підприємець, щоб отримати 10 000 грн, за умови, що норма дисконту становить 12 %?

Розв'язання

Знайдемо величину дисконту. Якщо $P = S - D = S(1 - dt)$, то $S = \frac{P}{1 - dt} = \frac{10\,000}{1 - 0,12 \cdot 0,5} \approx 10\,638,3$ (грн).

Отже, щоб отримати 10 000 грн, підприємець повинен просити у банку позику в розмірі 10 638,3 грн.

Заняття 29–30

Тема. ***Складний відсоток. Конверсійний період***

Мета: ознайомити учнів із поняттям складного відсотка (компаунда) та формулою його обчислення, із поняттям конверсійного періоду; формувати вміння обчислювати складний відсоток.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: майбутня вартість, початковий капітал.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Одним із методів обчислення прибутку є вже розглянутий метод простих відсотків. Інший метод нарахування відсотків — *метод складних відсотків (компаундінг)*. Зазначимо, що складні відсотки в економіці також називають *компаундом*, а метод складних відсотків — компаудінгом. Цей метод полягає у такому: на основну суму через певний проміжок часу нараховується відсоток; цю нову суму (тобто основну суму плюс прибуток з основної суми) використовують як нову основну суму для наступного часового проміжку; дана процедура повторюється визначену кількість рівних часових проміжків. Період від нарахування до нарахування відсотків називають *конверсійним періодом*. Зазвичай у якості конверсійного періоду беруть цілий дільник року (місяць, квартал, півроку або рік).

Нарахування складних відсотків щомісяця, тобто 12 разів на рік, називають *щомісячним нарахуванням (щомісячним компаундом)*. Нарахування складних відсотків щоквартально, тобто 4 рази на рік, називають *квартальним компаундом*. Нарахування складних відсотків кожні півроку, тобто 2 рази на рік, називають *піврічним компаундом*.

Відсотки за методом складних відсотків (у подальшому називатимемо цю дію *обчисленням складних відсотків або компаунду*) визначають за формулою:

$$S = P(1+i)^n,$$

де S — майбутня вартість; P — початковий капітал; i — відсоткова ставка за конверсійний період ($i = \frac{r}{m}$, де r — річна ставка, m — число конверсійних періодів за рік); n — кількість конверсійних періодів за визначену кількість років (тобто $n = mt$, де t — кількість років нарахування).

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Визначте загальну суму для 10 000 грн, вкладених на 1 рік під 24 % річних із квартальним компаундом.

Розв'язання

За умовою задачі $P = 10\,000$ грн; $r = 0{,}24$; $m = 4$ періоди, $t = 1$ рік.

Визначимо відсоткову ставку за конверсійний період: $i = \frac{r}{m} = \frac{0{,}24}{4} = 0{,}06$.

Визначимо кількість конверсійних періодів: $n = m \cdot t = 4 \cdot 1 = 4$.

Отже, загальна сума дорівнює:

$S = P(1+i)^n = 10\,000 \cdot (1+0{,}06)^4 \approx 12\,624{,}77$ (грн).

Задача 2. Підприємець поклав у банк 50 000 у. о. під 8 % річних із піврічним нарахуванням складних відсотків. Через 2 роки він поклав на той самий рахунок ще 15 000 у. о., але відсоткова ставка на цей момент змінилася і становила вже 6 % річних. Скільки грошей буде у підприємця на рахунку через 4 роки після того, як він поклав 50 000 у. о.? Який при цьому буде прибуток підприємця?

Розв'язання

Знайдемо суму грошей, яка була на рахунку підприємця через 2 роки після першого вкладу:

$S = P(1+i)^n = 50\,000 \cdot (1+0{,}08)^4 \approx 68\,024{,}45$ (у. о.).

За умовою через 2 роки підприємець поклав у банк ще 15 000 у. о. Визначимо суму на його рахунку:

$68\,024{,}45 + 15\,000 = 83\,024{,}45$ (у. о.).

Знайдемо загальну суму грошей на рахунку ще через 2 роки (при 6 % піврічного нарахування складних відсотків):

$S = P(1+i)^n = 83\,024{,}45 \cdot (1+0{,}06)^4 \approx 104\,816{,}45$ (у. о.).

Тобто через 4 роки на рахунку підприємця буде 104 816,45 у. о.

Отже, прибуток підприємця складе:

$104\,816{,}45 - 50\,000 - 15\,000 = 38\,816{,}45$ (у. о.).

Задача 3. Яку суму грошей треба інвестувати на 2 роки під 12 % річних із щомісячним нарахуванням складних відсотків, щоб отримати по закінченню терміну вкладу 50 000 грн?

Розв'язання

З формули для обчислення складних відсотків виразимо початковий капітал: $P = \frac{S}{(1+i)^n}$.

Підставимо відомі з умови задачі дані:

$$P = \frac{50\,000}{\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{24}} \approx 39\,378{,}3 \text{ (грн).}$$

Отже, треба вкласти наближено 39 378,3 грн, щоб через два роки за даних умов отримати 50 000 грн.

Задача 4. На основну суму 10 000 грн протягом 6 років із відсотковою ставкою 20,8 % річних щоквартально нараховуються складні відсотки. Знайдіть загальну суму грошей за даних умов.

Розв'язання

З формули для обчислення складного відсотка визначимо загальну суму грошей:

$$S = P(1+i)^n = 10\,000\cdot\left(1+\frac{0,208}{4}\right)^{24} \approx 33\,758,06 \text{ (грн)}.$$

Отже, через 6 років за даних умов на рахунку буде наближено 33 758,06 грн.

Задача 5. На основну суму 10 000 у. о. щоквартально протягом 15 років і 3 місяців нараховуються складні відсотки з відсотковою ставкою 6 % річних. Знайдіть загальну суму грошей за даних умов.

Розв'язання

Визначимо кількість конверсійних періодів:

$n = m\cdot t = 4\cdot 15,25 = 61$.

Знайдемо відсоткову ставку за конверсійний період:

$i = \frac{r}{m} = \frac{0,06}{4} = 0,015$.

Підставимо знайдені дані у формулу складного відсотка:

$S = 10\,000(1+0,015)^{61} \approx 24\,634$ (у. о.).

Заняття 31–32

Тема. ***Простий та складний відсотки***

Мета: формувати в учнів уміння визначати загальну суму (початковий капітал, термін вкладу, ставку відсотка) за методом простих і складних відсотків; порівнювати отримані результати.

Тип заняття: застосування вмінь і навичок.

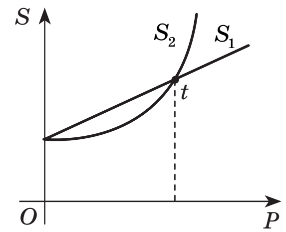
Базові поняття: простий відсоток, складний відсоток, термін вкладу.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Кінцева вартість за умови нарахування простих відсотків дорівнює: $S_1 = P(1+r_1t)$, де r_1 — відсоткова ставка за умови нарахування простих відсотків.

Кінцева вартість за умови нарахування складних відсотків раз на рік дорівнює: $S_2 = P(1+r_2)^t$, де r_2 — відсоткова ставка за умови нарахування складних відсотків.

Розглянемо $S_1 = P(1+r_1t)$ і $S_2 = P(1+r_2)^t$ як функції від часу. Зобразимо їх графічно (див. рисунок).



Ці функції рівні між собою в точці $t = 0$ при $S_1 = S_2 = P$.

За умови $r_1 = r_2 = r$ в точці $t = 1$ $S_1 = S_2 = 1 + rt$.

Якщо $t < 1$, то $S_2 < S_1$.

Якщо $t > 1$, то $S_2 > S_1$.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Підприємець вклав у банк 10 000 грн з річною ставкою 16 %. Знайдіть загальну суму через 2 роки після вкладу, застосовуючи метод простих і метод складних відсотків, якщо компаунд у випадку складних відсотків піврічний. Порівняйте отримані результати.

Розв'язання

Обчислимо загальну суму за формулою простих відсотків:

$S = P(1+rt) = 10\,000(1+0,16\cdot 2) = 13\,200$ (грн).

Обчислимо загальну суму за формулою складних відсотків:

$$S = P(1+i)^n = 10\,000\cdot\left(1+\frac{0,16}{2}\right)^4 = 13\,604,89 \text{ (грн)}.$$

Порівнюючи отримані результати, зробимо висновок: за однакових заданих умов (однаковий початковий капітал, річний відсоток, термін вкладу) більший прибуток підприємець отримає при нарахуванні відсотків за методом складних відсотків, ніж за методом простих відсотків.

Задача 2. За умови нарахування складних відсотків із річним відсотком r початкова сума подвоїлася би протягом року. Визначте, скільки треба часу, щоб та сама початкова сума подвоїлася за умови нарахування такого самого відсотка за методом простих відсотків.

Розв'язання

Знайдемо початковий капітал із формули складних відсотків: $P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{2P}{(1+i)^n}$; $1 = \frac{2}{1+r}$; $r = 1$. Тобто, щоб початкова сума подвоїлася протягом року, треба нараховувати 100 % річних. Якщо за тих самих умов нараховувався б простий відсоток, то: $S = P(1+rt)$; $2 = 1+1\cdot t$. Звідси $t = 1$.

Отже, за даних умов відмінність між складним і простим відсотками відсутня.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача. Підприємець має 5000 грн і хоче через 2 роки отримати 10 000 грн. Він може вкласти гроші або в банк *A*, або в банк *B*. Банк *A* пропонує підприємцю нараховувати прості відсотки, а банк *B* — складні відсотки за умови піврічного компаунду. Підприємець підрахував загальну суму в обох випадках і дійшов висновку, що йому все одно, в який банк вкладати гроші, бо в результаті він отримає однакову кінцеву суму. Визначте, які відсотки запропонували підприємцю банк *A* і банк *B*?

Розв'язання

Знайдемо річну ставку за формулою простих відсотків:

$S = P(1+rt)$; $10\,000 = 5000(1+2r)$; $r = 0{,}5$.

Обчислимо річну ставку за формулою складних відсотків:

$S = P(1+i)^n$; $10\,000 = 5000\left(1+\frac{r}{2}\right)^4$; $r \approx 0{,}38$.

Таким чином, банк *A* запропонував підприємцю 50 % річних, а банк *B* — приблизно 38 % річних.

Заняття 33–35

Тема. ***Методи теорії ігор і прийняття рішень***

Мета: ознайомити учнів із основними методами теорії ігор і прийняттям рішень, матрицею гри; формувати вміння складати й аналізувати матрицю гри з однозначним способом розв'язування.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: теорія ігор, матриця гри.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Теорія ігор — розділ математики, методи якого допомагають вибрати у конфліктних ситуаціях найкраще розв'язання з декількох можливих. Ситуацію називають *конфліктною*, якщо

в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфлікту, намагаються приховати свої наміри від супротивника, то прийняття рішень відбувається переважно в умовах невизначеності.

Гра — дійсний або формальний конфлікт, в якому беруть участь хоча б два учасники (гравці), кожен з яких прагне досягти власної мети. *Правила гри* — система вимог, яка регламентує можливі варіанти дій сторін. Множину можливих виборів (скінченну або нескінченну), яку має кожен гравець, називають *стратегіями*. Стратегія гравця є *оптимальною,* якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш.

Ігри класифікують за різними ознаками:

1) за кількістю гравців: 1, 2, ..., *k* гравців;
2) за кількістю стратегій: скінченні, нескінченні;
3) за характером взаємовідносин: безкоаліційні, кооперативні, коаліційні;
4) за характером виграшів: з нульовою сумою (одна сторона виграє стільки, скільки програє інша), з ненульовою сумою;
5) за виглядом функції виграшів: матричні, біматричні, неперервні, випуклі, сепарабельні, типу дуелі;
6) за кількістю ходів: однокрокові, багатокрокові;
7) за станом інформації: з повною інформацією, з неповною інформацією.

Розглянемо гру, в якій беруть участь два гравці (*A* і *B*), один з яких дотримується стратегії *i* із *n* своїх можливих стартегій ($i = 1, 2, \ldots, n$), а другий, не знаючи вибору першого, вибирає стратегію *j* із *m* своїх можливих стратегій ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Величини a_{ij} утворюють платіжну матрицю гри:

$$[a_n] = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} B_1\ B_2\ \ldots\ B_m \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

Рядки матриці $\left[a_{ij}\right]$ відповідають стратегіям (A_1, A_2, ..., A_n) гравця *A*, стовпчики матриці $\left[a_{ij}\right]$ — стратегіям (B_1, B_2, ..., B_n) гравця *B*. Вважатимемо, що при $a_{ij} > 0$ гравець *A* виграє, а гравець B програє величину a_{ij}. Тоді при $a_{ij} < 0$, навпаки, гравець B виграє, а гравець A програє величину a_{ij}.

Щоб визначити найкращу зі стратегій гравця A, необхідно врахувати те, що на довільну стратегію A_i гравець B відповідає стратегією B_j, для якої виграш гравця A буде мінімальним.

При розв'язуванні гри використовуються такі поняття:

$\alpha = \max \min \alpha_i$ — *максимін*, або нижня ціна гри;

$\beta = \min \max \beta_i$ — *мінімакс*, або верхняя ціна гри.

Якщо гравець A буде дотримуватися максимінної стратегії, то йому при довільній поведінці гравця B у будь-якому випадку гарантований виграш не менший α. Аналогічно можна визначити найкращу стратегію для гравця B, мета якого — звести виграш гравця A до мінімуму. Найобережніша стратегія для гравця B — мінімаксна стратегія. Вона забезпечує йому в будь-якому випадку програш не більший β і відповідно — виграш гравцеві A, теж не більший β.

Якщо $\alpha = \beta = \nu$, то число ν називають *ціною гри*.

Гру, для якої $\alpha = \beta$, тобто мінімаксне значення дорівнює максимінному, називають *грою із сідловою точкою* (елемент матриці одночасно є мінімальним у своєму рядку та максимальним у своєму стовпчику).

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Дано матрицю 3×4. Припустимо, матрична гра багаторазова. Першим грає рядковий гравець (P) (він намагається максимізувати свій виграш), другим — стовпчиковий гравець (C) (він намагається мінімізувати свій програш). Нехай додатні елементи матриці означають відповідно виграш для гравця P і програш для гравця C, а від'ємні елементи — виграш для гравця C і програш для гравця P. Визначте найкращу з можливих стратегію гри для кожного гравця.

$$\begin{array}{cc} & C \\ P & \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & -7 & 30 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Розв'язання

У даному випадку гравець P може обрати один із трьох можливих варіантів (один із рядків), а гравець C — один із чотирьох можливих варіантів (один зі стовпчиків).

Розглянемо деякі можливі варіанти вибору гравців.

Позначимо в кожному рядку найбільш можливий варіант виграшу:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & -7 & 30 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Звичайно, гравець P хотів би обрати 2-й рядок, де найбільш можливий варіант виграшу (30 од.), але при цьому очевидно, що гравець C ніколи не обере 4-й стовпчик, бо не захоче стільки програвати (30 од.). Він обере або 2-й стовпчик (5 од. виграшу для нього), або 3-й стовпчик (7 од. виграшу для нього). Щоб обрати найкращий з можливих варіантів гри та забезпечити собі виграш, гравцям треба бути обережними.

Отже, найкраща стратегія для гравця P — це вибір 3-го рядку (гравець C не виграє в жодному варіанті, але при цьому гравець P виключить можливість свого програшу). Гравець C обере 3-й стовпчик, щоб мінімізувати свій програш.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. На ринку холодильниками торгують дві фірми: фірма «Укрхолод» і фірма «Імпорт холод». У кожній фірмі визначили собівартість і ціну свого товару. Інформація, якою вони володіють, має такий вигляд:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{«Укрхолод»} \\ & & \begin{array}{cc} 2300\ \text{грн} & 2550\ \text{грн} \end{array} \\ \text{«Імпорт холод»} & \begin{array}{c} 2300\ \text{грн} \\ 2550\ \text{грн} \end{array} & \begin{pmatrix} 45\% & 55\% \\ 25\% & 70\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Визначте найкращий із можливих варіантів встановлення ціни на продукцію кожної фірми.

Розв'язання

Якщо обидві фірми оцінять свою продукцію в 2300 грн, то фірма «Імпорт холод» отримає 45 % прибутку, а фірма «Укрхолод» при цьому отримає 55 % прибутку $(100\,\% - 45\,\%)$. Якщо ж «Імпорт холод» оцінить свою продукцію у 2300 грн, а «Укрхолод» — у 2550 грн, то «Імпорт холод» отримає 55 % прибутку, а «Укрхолод» — 45 %.

Кожна фірма намагається максимізувати свій прибуток (мінімізувати збитки). Фірма «Імпорт холод» розраховувала одержати 70 % прибутку, але вона ризикує отримати лише 25 %, тому вона встановить ціну на свою продукцію на рівні 2300 грн. При цьому фірма «Укрхолод» встановить ціну на свою продукцію також на рівні 2300 грн, тобто обере 1-й стовпчик.

Задача 3. Фірма *A* виготовляє та постачає на ринок 3 види товарів (A_1, A_2, A_3). Фірма-конкурент *B* пропонує на ринку аналогічні 3 види товарів (B_1, B_2, B_3). Фірми не знають про наміри одна одної щодо обсягу продаж товарів на ринку, але володіють даними про ймовірність продати той чи інший товар за умови наявності на ринку товарів конкурента. У табл. 1 наведено коефіцієнти ймовірностей продажу товарів фірмою *A* і фірмою *B*.

Таблиця 1

Товари фірми *B* / Товари фірми *A*	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,4	0,7
A_2	0,2	0,8	0,1
A_3	0,7	0,0	0,9

Дайте пораду фірмам *A* і *B* щодо раціонального вибору виду товару та просування його на ринку в умовах конкуренції, забезпечивши при цьому найбільшу ймовірність продажів, які б дії не робив конкурент.

Розв'язання

Визначимо максимін для товарів фірми *A* (табл. 2): для кожного рядка праворуч запишемо відповідні мінімальні значення коефіцієнту ймовірності (α_i), серед яких виберемо найбільше та позначимо його (*).

Визначимо мінімакс для товарів фірми *B*: для кожного стовпчика внизу запишемо відповідні максимальні значення коефіцієнту ймовірності (β_i), серед яких виберемо найменше та позначимо його зірочкою (*).

Товари фірми *B* / Товари фірми *A*	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,4	0,7	0,4*
A_2	0,2	0,8	0,1	0,1
A_3	0,7	0,0	0,9	0,0
β_i	0,7*	0,8	0,9	—

Тобто фірма *A* повинна застосовувати максимінну стратегію. При цьому вона гарантовано отримає результат не менше 0,4 (незалежно від дій фірми-конкурента).

Для фірми-конкурента *B* найкращою в цих умовах стратегією є мінімаксна. При цьому фірма *B* гарантує собі результат не більше 0,8.

Отримані рекомендації справджуються лише у випадках, коли фірма не володіє даними про вибір стратегії фірмою-конкурентом (оскільки $\alpha_i \neq \beta_i$).

Задача 4. Фірма *A* виготовляє та постачає на ринок 3 види товарів (A_1, A_2, A_3). Фірма-конкурент *B* пропонує аналогічні 3 види товарів (B_1, B_2, B_3). Припустимо, фірмам відома кількість товарів, яку планує продавати фірма-конкурент. Ці відомості подано в табл. 3.

Визначте, який вид товару раціонально обрати та просувати кожній фірмі на ринку в умовах конкуренції, забезпечивши при цьому найбільшу ймовірність продажів, які б дії не робив конкурент.

Таблиця 3

Товари фірми *B* (у тис. од.) / Товари фірми *A* (у тис. од.)	B_1	B_2	B_3
A_1	5	4	7
A_2	7	6	9
A_3	3	1	5

Розв'язання

Визначимо в табл. 4 максимін і мінімакс, позначимо відповідні значення зірочкою (*).

Таблиця 4

Товари фірми *B* (у тис. од.) / Товари фірми *A* (у тис. од.)	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	4	7	4
A_2	7	6	9	6*
A_3	3	1	5	1
β_i	7	6*	9	—

Тобто фірма A повинна застосовувати максимінну стратегію — продавати товар A_2, при цьому вона гарантовано продасть не менше 6 тис. од. товару.

Для фірми-конкурента B оптимальною є мінімаксна стратегія — продавати товар B_2, при цьому вона гарантовано продасть не більше 6 тис. од. товару. Чим більшим є результат продажу фірми A, тим меншою є кількість проданого товару фірмою-конкурентом B.

З табл. 4 видно, що значення нижньої та верхньої цін гри рівні $\left(\alpha_i = \beta_i\right)$, отже, отримані рекомендації справджуються незалежно від того, володіє чи ні фірма-конкурент будь-якою інформацією щодо продаж свого конкурента.

Контрольні запитання до теми 3

1. Запишіть формулу для обчислення простих відсотків.
2. Запишіть формулу для обчислення складних відсотків.
3. Що таке конверсійний період та як його визначити?
4. Що вивчає теорія ігор?
5. Складіть власну матрицю гри, знайдіть її розв'язок.

11 КЛАС

ТЕМА 1. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Заняття 1–2

Тема. ***Граничний дохід, граничний прибуток і граничні витрати***

Мета: ознайомити учнів із поняттям граничних величин (дохід, прибуток, витрати, корисність); формувати вміння їх обчислювати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: похідна, загальний дохід, загальні витрати, виручка від реалізації, граничний дохід, граничний прибуток, граничні витрати (з курсу 10 класу).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо приклади, за допомогою яких можна узагальнити економічний зміст похідної.

Приклад 1. Нехай продуктивність праці y є функцією від часу t: $y = f(t)$. Якщо змінна t отримає приріст Δt, то зміна продуктивності праці за певний проміжок часу становитиме: $\Delta y = f(t+\Delta t) - f(t)$. Середня зміна продуктивності праці за одиницю часу визначається співвідношенням $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$; границя цього співвідношення $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$, якщо вона існує, характеризує *ріст продуктивності праці*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t)$.

Приклад 2. Ріст кількості N населення протягом певного періоду t є функція $N=f(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість росту кількості населення*: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=N'(t)$.

Приклад 3. Витрати Q природних ресурсів протягом часу t є функція $Q=f(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість витрат ресурсів*: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=Q'(t)$.

Приклад 4. Виручка u від продажу товару залежить від його кількості x: $u=u(x)$. Границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, якщо вона існує, називають *граничною виручкою*: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$.

Приклад 5. Витрати K виробництва залежать від кількості x продукції, що випускається: $K=K(x)$. Границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta K}{\Delta x}$, якщо вона існує, називають *граничними витратами*: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta K}{\Delta x}=K'(x)$. Величина $K'(x)$ характеризує наближено додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції.

Приклад 6. Процес зношування T обладнання протягом певного часу t є функція $T=T(t)$. Границя $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$, якщо вона існує, визначає *швидкість зносу обладнання*: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=T'(t)$.

Таке використання диференціального числення називають *граничним аналізом*. Граничний аналіз є одним із основних методів мікроекономіки (науки про господарство). Зауважимо, що наведені приклади не вичерпують переліку можливого застосування похідної.

Поняття корисності

Корисність — це задоволення, яке отримує людина від споживання товарів (послуг).

Мета споживача полягає у максимізації корисності.

Загальна (сукупна) корисність (TU) — це сумарна величина задоволення від споживання конкретної кількості товарів (послуг).

Функція корисності — це залежність загальної корисності від кількості спожитих товарів або послуг (рис. 1).

У випадку споживання одного блага функція корисності має вигляд $TU=f(x,y)$; у випадку споживання двох благ — вигляд $TU=f(x)$.

Благо в теорії споживання — це будь-який об'єкт споживання, який приносить визначене (стійке, передбачене) задоволення споживачу, тобто підвищує рівень його добробуту.

Гранична корисність (MU) — це додаткова корисність, одержана від споживання додаткової одиниці блага (d), або приріст сукупної корисності (див. рис. 1):

$$MU_X=\frac{df(x,y)}{dx},\text{ або } MU_X=\frac{\Delta TU_X}{\Delta x};\quad MU_Y=\frac{df(x,y)}{dy}.$$

Закон спадної граничної корисності (перший закон Ґоссена): при споживанні кожної додаткової одиниці блага величина додаткового задоволення зменшується.

Але є деякі виключення із цього закону, наприклад антикваріат, алкоголь, тютюн (зі збільшенням споживання ці блага та антиблага мають зростаючу граничну корисність).

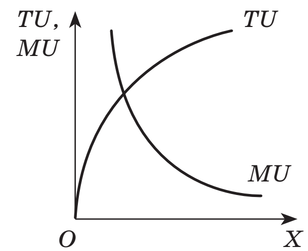


Рис. 1

Щоб отримати максимальне задоволення від придбаних благ, раціональний споживач користується *правилом максимізації корисності (другий закон Ґоссена)*: споживач максимізує корисність, якщо він розподіляє свій грошовий дохід так, що гранична корисність на останню грошову одиницю видатків є однаковою для кожного виду товарів.

Це правило має такий вигляд для двох товарів:

$$\frac{MU_X}{P_X}=\frac{MU_Y}{P_Y},$$

де MU_X — гранична корисність блага X; P_X — ціна блага X; MU_Y — гранична корисність блага Y; P_Y — ціна блага Y.

Поняття норми заміни

Важливою характеристикою уподобань споживача є його схильність замінювати одне благо іншим.

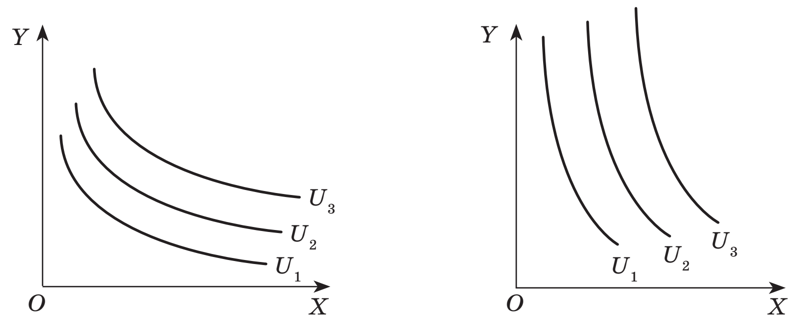
Норма заміни (заміщення) — це кількість одного блага, від якої споживач повинен відмовитись, щоб одержати додаткову одиницю іншого блага за умови збереження незмінного рівня загальної корисності.

Гранична норма заміщення блага Y благом X $\left(MRS_{XY}\right)$ показує кількість блага Y, яка повинна бути скорочена в обмін на збільшення блага X на одиницю d за умови, що рівень корисності залишається незмінним:

$$MRS_{XY} = -\frac{dY}{dX}.$$

Поняття кривої байдужості

Крива байдужості (U) — це лінія, усі точки якої характеризують набори двох благ X і Y, що забезпечують споживачеві однаковий рівень загальної корисності. Сукупністю кривих байдужості, кожна з яких відповідає певному рівню корисності, називають *картою кривих байдужості*. Залежно від уподобань споживача криві байдужості мають різний кут нахилу (рис. 2).



Споживач віддає перевагу товару Y

Споживач віддає перевагу товару X

Рис. 2

Із рис. 2 бачимо, що криві байдужості U_1, U_2, U_3 не перетинаються, мають від'ємний нахил (оскільки, щоб корисність не змінилась, для збільшення споживання одного блага необхідно скоротити споживання іншого блага), вони випуклі до початку координат і по мірі руху зліва направо стають більш плавними внаслідок насичення благом X.

Графічно гранична норма заміщення блага Y благом X $\left(MRS_{XY}\right)$ є тангенсом кута нахилу дотичної, проведеної до кривої байдужості в даній точці. Дотичні до точок кривої байдужості свідчать про те, що якщо благо Y заміщується благом X, то рух вздовж кривої байдужості відбувається зверху вниз і супроводжується зменшенням граничної норми заміщення (від'ємне значення MRS_{XY}).

Величина MRS_{XY} пов'язана з граничними корисностями благ X і Y співвідношенням:

$$MRS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y},$$

де MY_X — гранична корисність блага X; MU_Y — гранична корисність блага Y.

Поняття рівноваги споживача

Карта байдужості є графічним поданням смаків споживачів. Купівельна спроможність споживача виражається бюджетною лінією. Поєднання цих двох графіків показує, яка товарна комбінація на карті байдужості максимізує корисність (рис. 3). Найпривабливіший набір благ серед можливих називають *оптимальним вибором споживача* або *рівновагою споживача* (точка E на рис. 3).

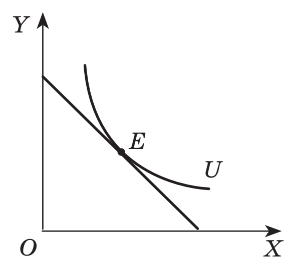


Рис. 3. Рівновага споживача

Отже, максимальна корисність досягається у точці E, де бюджетна лінія дотична до кривої байдужості, тобто де нахил кривої байдужості $\left(MRS_{XY}\right)$ дорівнює нахилу бюджетного обмеження $\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)$. Таким чином, у точці рівноваги споживача виконується рівність: $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{P_X}{P_Y}$, або $MRS_{XY} = \frac{P_X}{P_Y}$. Тобто $\frac{P_X}{P_Y}$ — співвідношення, в якому споживач за даних цін *здатен* заміщувати один товар іншим. Воно дорівнює співвідношенню MRS_{XY}, в якому споживач *згоден* заміщувати один товар іншим без зміни рівня свого задоволення. Тоді $\frac{P_X}{P_Y} = \frac{MU_X}{MU_Y}$, або $\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}$.

Алгебраїчно оптимальний набір товарів (рівновага споживача) визначається шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}, \\ I = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y. \end{cases}$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Функцію доходу фірми від ціни задано рівнянням $TR = -5p^2 + 100p$. Визначте, яким буде граничний дохід фірми, якщо ціна становитиме 2 грн; 5 грн; 10 грн.

Розв'язання

Знайдемо граничний дохід: $MR = TR'(p) = -10p + 100$. Визначимо граничний дохід за різних значень ціни: $MR(2) = 80$; $MR(5) = 50$; $MR(10) = 0$.

Отже, за ціною 2 грн граничний дохід складатиме 80 грн; за ціною 5 грн — 50 грн; за ціною 10 грн — 0 грн.

Задача 2. Функція витрат підприємства описується рівнянням $TC(Q) = 2Q^2 + 3Q + 4$. Визначте граничні витрати, якщо обсяг виробництва становитиме 50 од.; 100 од.; 150 од.

Розв'язання

Підставимо у формулу граничних витрат відомі з умови задачі дані: $MC = TC'(Q) = 4Q + 3$. Визначимо граничні витрати за різних обсягів виробництва: $MC(50) = 203$; $MC(100) = 403$; $MC(150) = 603$. Отже, граничні витрати на виробництво за умови обсягу продукції 50 од. складатимуть 203 грн, за умови обсягу 100 од. — 403 грн, за умови обсягу 150 од. — 603 грн.

Задача 3. Обсяг продукції, що виробляється працівниками підприємства, описується рівнянням $Q(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 5t + 7$, де t — робочий час (у годинах) $(0 \leqslant t \leqslant 8)$. Обчисліть продуктивність праці працівників фірми через 3 год від початку роботи.

Розв'язання

Знайдемо продуктивність праці: $Q'(t) = -t + 5$.

Через 3 години продуктивність праці становитиме: $Q'(3) = 2$ од. за годину.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 4. Функцію корисності задано рівнянням $TU = 50x - 2x^2$, де x — кількість товару. Визначте, починаючи з якої одиниці товару загальна корисність зменшуватиметься.

Розв'язання

Щоб визначити проміжок, де загальна корисність зменшується (спадає), треба застосовувати достатню ознаку зростання (спадання) функції в точці, тобто слід визначити, де похідна функції $TU(x)$ менше нуля. Визначимо граничну корисність: $MU = TU' = 40 - 4x$; $40 - 4x > 0$; $x > 10$.

Отже, починаючи з 11-ї одиниці товару загальна корисність зменшуватиметься.

Задача 5. Функцію корисності задано рівнянням $TU(x, y) = yx^2 + xy^2$, де x — кількість яблук (кг); y — кількість груш (кг). Визначте граничну корисність яблук і груш за умови споживання яблук і груш по 3 кг.

Розв'язання

Визначимо граничну корисність яблук. Для цього знайдемо похідну загальної корисності по x:

$$MU_x = \frac{dTU(x, y)}{dx} = TU'(x) = 2xy + y^2.$$

За умовою задачі споживання яблук і груш є однаковим — по 3 кг. Тобто $x = 3$; $y = 3$. Тоді $MU_x = 27$.

Аналогічно знайдемо граничну корисність груш:

$MU_y = \dfrac{dTU(x, y)}{dy} = TU'(y) = x^2 + 2xy$. Визначимо граничну корисність груш в наборі споживання $(3; 3)$: $MU_y = 27$.

Задача 6. Функцію корисності задано рівнянням $TU(x, y) = 25xy - 5xy^2$, де x — кількість винограду (кг); y — кількість слив (кг). Визначте: граничну корисність винограду і слив за умови споживання 3 кг винограду і 2 кг слив; при якій кількості споживання слив загальна корисність споживання зменшуватиметься.

Розв'язання

Визначимо граничну корисність винограду. Для цього знайдемо похідну загальної корисності по x:

$MU_x = \dfrac{dTU(x, y)}{dx} = TU'(x) = 25y - 5y^2$. За умовою задачі споживання винограду становить 3 кг, слив — 2 кг. Тобто $x = 3$, $y = 2$.

Визначимо граничну корисність винограду в наборі споживання $(3; 2)$: $MU_x = 30$.

Знайдемо граничну корисність слив:

$$MU_y = \frac{dTU(x, y)}{dy} = TU'(y) = 25x - 10xy.$$

Визначимо граничну корисність слив у наборі споживання $(3; 2)$: $MU_y = 15$.

Щоб визначити, при якій кількості споживання слив загальна корисність споживання зменшуватиметься, треба застосовувати достатню ознаку зростання (спадання) функції в точці, тобто слід визначити, де похідна функції $TU(y)$ буде менше нуля: $25x - 10xy < 0$. Розв'язавши дану нерівність, отримаємо $y > 2{,}5$.

Отже, якщо кількість слив у наборі споживання перевищуватиме 2,5 кг, то загальна корисність зменшуватиметься.

Задача 7. Функцію корисності задано рівнянням $TU(x, y, z) = 2x + 4y + 6z$, де x — кількість товару X (кг); y — кількість товару Y (кг); z — кількість товару Z (кг). Вартість одиниці товару Z дорівнює 2 у. о. Визначте вартості 1 од. товару X і 1 од. товару Y, якщо відомо, що споживач максимізує свою корисність.

Розв'язання

За другим законом Ґоссена споживач максимізує свою корисність, якщо: $\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} = \frac{MU_Z}{P_Z}$. Знайдемо граничні корисності даних товарів: $MU_X = 2$; $MU_Y = 4$; $MU_Z = 6$. За умовою задачі вартість 1 од. товару Z дорівнює 2 у. о., тобто $P_X = 2$. Визначимо вартість 1 од. товару X: $\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Z}{P_Z}$; $\frac{2}{P_X} = \frac{6}{2}$; $P_X = \frac{2}{3}$. Обчислимо вартість 1 од. товару Y: $\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Z}{P_Z}$; $\frac{4}{P_Y} = \frac{6}{2}$; $P_Y = 1\frac{1}{3}$. Тобто вартість 1 од. товару X дорівнює $\frac{2}{3}$ у. о., 1 од. товару Y становить $1\frac{1}{3}$ у. о.

Задача 8. Функцію загальної корисності споживача задано рівнянням $TU = xy$. Дохід споживача становить 54 грн, ціна товару X дорівнює 2 грн за кожну одиницю, ціна товару Y — 5 грн за кожну одиницю. Яку кількість товару X і товару Y придбає раціональний споживач? Визначте граничну норму заміщення MRS_{XY} в точці рівноваги споживача.

Розв'язання

Оптимальний набір товарів можна визначити за допомогою системи: $\begin{cases} \frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}, \\ I = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y. \end{cases}$ Знайдемо граничні корисності для товарів X і Y: $MU_X = TU'(X) = y$; $MU_Y = TU'(Y) = x$. Підставимо у систему відомі з умови задачі дані: $\begin{cases} \frac{y}{2} = \frac{x}{5}, \\ 54 = 2 \cdot x + 5 \cdot y. \end{cases}$ Звідси $y = 5{,}4$; $x = 13{,}5$.

Отже, раціональний споживач придбає 13,5 од. товару X і 5,4 од. товару Y.

Визначимо граничну норму заміщення: $MRS_{XY} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{2}{5}$.

Заняття 3–4

Тема. ***Максимальний дохід і максимальний прибуток***

Мета: ознайомити учнів із поняттями максимального доходу та максимального прибутку; навчити визначати ці поняття.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: прибуток, дохід, загальний дохід, загальні витрати, граничний дохід, граничний прибуток, граничні витрати, максимальний дохід, максимальний прибуток.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача на знаходження максимального прибутку може бути розв'язана як аналітично, так і графічно.

Розглянемо графічний спосіб розв'язування. Нехай дано криві TR і TC (верхня частина рис. 1).

Прибуток для будь-якого значення Q (горизонтальні координати) графічно визначається як різниця вертикальних координат заданих кривих (нижня частина рис. 1).

Якщо $Q_A < Q < Q_B$, то підприємство отримуватиме прибуток.

Якщо $Q_A > Q > Q_B$, то підприємство нестиме збитки.

Якщо $Q = Q_E$, то підприємство матиме максимальний прибуток.

Точки A і B є точками беззбитковості, тобто за певних умов підприємство одержуватиме нульовий прибуток (виручка від реалізації дорівнюватиме сумарним витратам).

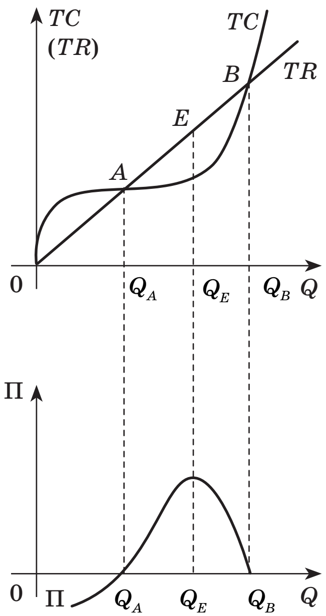


Рис. 1

Розглянемо аналітичний спосіб знаходження максимального прибутку.

Щоб визначити максимальний прибуток, необхідно знайти максимум функції $\Pi(Q)$. Згідно з необхідною умовою максимуму функції треба знайти такий обсяг (Q) товару, для якого похідна функції $\Pi(Q)$ дорівнюватиме нулю. Тобто $\Pi'(Q) = TR'(Q) - TC'(Q) \Rightarrow$ $\Rightarrow M\Pi = MR - MC \Rightarrow R - MC = 0$, де $M\Pi$ — граничний прибуток, який показує, на скільки зміниться прибуток виробника при зміні обсягу виробництва на одиницю товару.

Одержимо, що $MR = MC$ — умова максимізації прибутку. Нагадаємо, що ми вже розглядали універсальне правило ринку. Це правило справджується для різних видів ринків (досконалої конкуренції, монополії тощо). Крім того, для конкуруючої фірми виконується рівність $MR = MC = P$.

Зазначимо, що ціна (P) є функцією від кількості товару (Q). Реально ціна визначається не тим, скільки хоче отримати виробник, а тим, скільки готовий заплатити споживач. Виразимо з лінійного рівняння попиту ціну і запишемо його таким чином: $P = aQ + b$, де $a < 0$; $b > 0$, оскільки крива попиту — спадна функція.

Підставимо одержаний вираз у формулу загального доходу: $TR = (aQ + b)Q = aQ^2 + bQ$.

У результаті отримаємо квадратичну функцію з параметром $c = 0$, від'ємним параметром a і додатним параметром b. Цих умов достатньо, щоб, використовуючи властивості квадратичної

функції, побудувати графік (рис. 2). При цьому побудуємо лише ту частину графіка, яка має економічний зміст, тобто де $Q > 0$, $TR > 0$.

Із рис. 2 видно, що загальний дохід дорівнює нулю на початку координат $(Q = 0)$ і у точці $Q = -\frac{b}{a}$.

Максимального значення обсяг продажу (максимальний дохід) досягає за умови, що $Q = -\frac{b}{2a}$. Праворуч від цієї точки функція стає спадною, тобто величина доходу спадає зі зростанням об'єму продаж. Цей факт здається нереальним, хоча і спостерігається на практиці. Його можна пояснити, визначивши еластичність попиту за ціною.

Крім того, максимальний дохід можна знайти за допомогою похідної: $MR = (TR)'$.

Розглянемо *алгебраїчний спосіб* знаходження максимального прибутку.

Для цього достатньо з формули прибутку $\Pi = TR - TC$ виразити загальний дохід TR і загальні витрати TC через кількість товару Q: $\Pi = aQ^2 + bQ - VX \cdot Q - FC = aQ^2 + (b - VC)Q - FC$, тобто квадратичну функцію. Прирівнюючи цю функцію до нуля і розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо два розв'язки Q_1 і Q_2 *(точки беззбитковості)*. Між цими точками виробництво буде прибуткове. Тоді $Q_{\max} = -\frac{b}{2a}$ ($Q_{\max}$ — абсциса вершини параболи), отже, $Q_{\max} = \frac{VC - b}{2a}$.

Оскільки параметр квадратичної функції $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз, як це показано на рис. 3, і функція має максимум, який досягається в точці $Q_{\max}$.

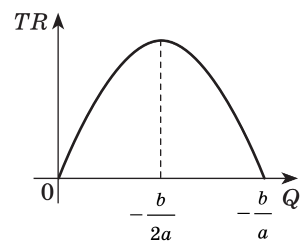


Рис. 2

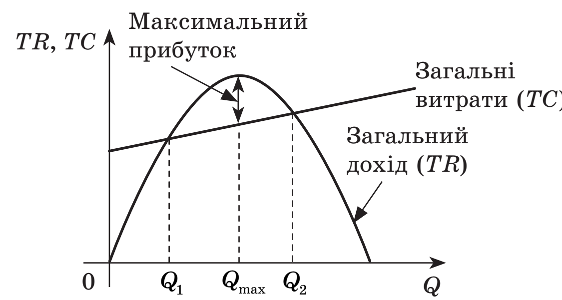


Рис. 3

Зазначимо, що точки Q_1 і Q_2, які визначають межі прибутковості виробництва, а також точка Q_{max}, в якій досягається максимальний прибуток, виражаються через параметри a і b кривої попиту і параметри FC і VC загальних витрат. Чим точніше визначаються ці параметри, тим точніше буде отриманий розв'язок.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Ціна продукції конкуруючої фірми дорівнює 60 у. о. за одиницю товару. Витрати фірми описуються рівнянням $TC=50+10Q^2$, де Q $(Q>0)$ — обсяг випуску продукції (од.). Визначте: 1) при якому обсязі випуску продукції фірма нестиме збитки; 2) рівноважний обсяг випуску продукції; 3) максимальний прибуток (у. о.).

Розв'язання

1) Фірма несе збитки, якщо $TC>TR$ або $ATC>P$. Обчислимо середні витрати фірми: $ATC=\frac{TC}{Q}=\frac{50+10Q^2}{Q}$. Звідси $\frac{50+10Q^2}{Q}>60$; $Q^2-6Q+5>0$; $Q_1=5$; $Q_2=1$.

Оскільки $Q>0$, отримаємо, що при $0<Q<1$ і при $Q>5$ фірма нестиме збитки.

2) Рівноважний обсяг продажу фірми досягається за умови: $MR=MC=P$. Знайдемо граничні витрати: $MC=TC'(Q)=20Q$. Прирівняємо граничні витрати та ціну продукції: $MC=P$. Звідси $20Q=60$; $Q=3$.

Тобто рівноважний обсяг випуску продукції, при якому прибуток максимальний, дорівнює 3 од.

3) Визначимо максимальний прибуток фірми: $\Pi=TR-TC=$ $=P\cdot Q-TC=60\cdot 3-(50+10\cdot 3^2)=40$ (у. о.).

Отже, максимальний прибуток за даних умов дорівнюватиме 40 у. о.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Ціна кожної одиниці продукції фірми становить 40 грн. Середні витрати фірми задано рівнянням $ATC=-20+30Q$, де Q — обсяг випуску продукції (у одиницях). Визначте: 1) при якому обсязі випуску продукції фірма матиме прибуток; 2) при якому обсязі випуску продукції фірма одержуватиме максимальний прибуток; 3) максимальний прибуток (в у. о.).

Розв'язання

1) Відомо, що $\Pi=TR-TC=P\cdot Q-TC=40Q-(-20Q+30Q^2)=$ $=-30Q^2+60Q$. Знайдемо точки беззбитковості: $-30Q^2+60Q=0$; $Q_1=0$; $Q_2=2$.

Тобто при обсязі виробництва в проміжку від 0 до 2 од. продукції фірма матиме прибуток.

2) Максимальний прибуток фірма одержуватиме при обсязі: $Q_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{60}{2\cdot(-30)}=1$.

Отже, фірма матиме максимальний прибуток при обсязі виробництва 1 од.

3) Визначимо максимальний прибуток. Для цього знайдемо загальні витрати.

За умовою задачі $ATC=-20+30Q$, тоді $TC=-20Q+30Q^2$; $\Pi=TR-TC=40\cdot 1-(-20+30\cdot 1^2)=30$ (у. о.).

Задача 3. Загальні витрати та виторг конкуруючої фірми задано рівняннями $TC=3Q^2-170Q-360$, $TR=Q^2+90Q$, де Q —обсяг випуску продукції (у одиницях). Визначте: 1) кількість продукції, яка максимізуватиме прибуток; 2) при якій ціні (у грн) прибуток фірми буде максимальним.

Розв'язання

1) Фірма максимізує свій прибуток за умови: $MR=MC=P$. Знайдемо граничні витрати та граничний дохід: $MC=TC'(Q)=$ $=6Q-170$; $MR=TR'(Q)=2Q+90$. Знайдемо обсяг випуску продукції, при якому прибуток фірми буде максимальним: $MR=MC$; $6Q-170=2Q+90$; $Q=65$.

Тобто якщо фірма випускатиме 65 од. продукції, то її прибуток буде максимальним.

2) Визначимо, яку ціну при даному обсязі виробництва треба встановити фірмі: $MR=MC=P$; $P=2Q+90=2\cdot 20+90=130$ (грн).

Задача 4. Функцію попиту на продукцію фірми задано рівнянням $Q_D=150-P$. Також відомо, що функція загальних витрат має вигляд $TC=Q^2-3Q+1$. Визначте: 1) обсяг випуску продукції, при якому функція попиту матиме максимальний прибуток; 2) максимальний прибуток; 3) за якої ціни на товар фірма повинна припинити виробництво.

Розв'язання

1) Фірма максимізує свій прибуток за умови: $MR=MC=P$. Знайдемо граничні витрати: $MC=TC'(Q)=2Q-3$. Виразимо ціну P

продукції з рівняння попиту: $P=150-Q$. Прирівняємо праві частини рівнянь: $2Q-3=150-Q$; $Q=51$.

Отже, фірма максимізує свій прибуток за умови випуску 51-ї одиниці продукції. Ціна продукції при цьому становитиме: $P=150-51=99$ (гр. од.).

2) Знайдемо максимальний прибуток:

$\Pi=TR-TC=99\cdot51-(51^2-3\cdot51+1)=2600$ (гр. од.).

3) Щоб визначити рівень цін, при якому фірмі треба припинити виробництво, обчислимо постійні, змінні та середні змінні величини. Спочатку знайдемо середні загальні витрати: $ATC=\dfrac{TC}{Q}=$ $=\dfrac{Q^2-3Q+1}{Q}=48{,}01$ (гр. од.). За умови припинення виробництва $(Q=0)$ змінні витрати дорівнюють нулю, тоді $TC=FC$. Звідси обчислимо постійні витрати: $FC=TC(0)=1$ (гр. од.). Тоді змінні витрати становитимуть: $VC=TC-FC=2449-1=2448$ (гр. од.). Отже, середні змінні витрати дорівнюватимуть: $AVC=\dfrac{VC}{Q}=$ $=\dfrac{2448}{51}=48$ (гр. од.).

Звідси умова закриття фірми: $P<AVC_{\min}$, тобто коли ціна буде менше 48 гр. од., фірма повинна буде припинити виробництво.

Заняття 5–6

Тема. **Мінімізація витрат**

Мета: ознайомити учнів з умовою мінімізації витрат, із поняттям ізокости; формувати вміння визначати мінімальні витрати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: витрати, обсяг виробництва, праця, капітал.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Підприємець завжди зацікавлений в тому, щоб обсяг виробництва був максимальним, а витрати при цьому — мінімальними.

Припустимо, у виробництві певного товару використовується тільки два ресурси, наприклад праця і капітал.

Виробнича функція встановлює зв'язок між виробництвом продукції та витратами двох основних факторів виробництва. Вона має такий вигляд: $Q=F(K,L)$, де Q — обсяг виробництва продукції; F — виробнича функція; L — праця; K — капітал.

При заданій технології такий самий випуск тієї самої кількості продукції можна забезпечити збільшенням капіталу або кількості робітників. З'єднавши різні можливі комбінації ресурсів, використання яких забезпечує однаковий обсяг випуску, отримаємо *ізокванту*. Кількість факторів L і K може постійно змінюватись (збільшуватись або зменшуватись), відповідно буде змінюватись максимальний випуск продукції. У результаті виникає множина ізоквант, яка відповідає різним обсягам випуску продукції. Утворюється карта ізоквант. Ізокванти мають від'ємний нахил, опуклі відносно початку координат, нахил ізокванти до відповідної осі збільшується (зменшується) при збільшенні (зменшенні) відповідного фактора виробництва, крім того, вони не перетинаються одна з одною (рис. 1). Ізокванти певною мірою аналогічні кривим байдужості.

Функція загальної вартості виробництва відображає сумарну вартість усіх використаних факторів виробництва і має вигляд:

$$TC(L,K)=P_L\cdot L+P_K\cdot K,$$

де TC — загальна вартість виробництва (загальні витрати); P_L — ціна одиниці праці; P_K — ціна одиниці капіталу.

Якщо ціни ресурсів незмінні, то ця функція є лінійною. Пряму лінію, всі точки якої відповідають різним варіантам сполучень факторів виробництва однакової вартості TC, називають *ізокостою* (рис. 2). Нахил ізокости дорівнює $\left(-\dfrac{P_L}{P_K}\right)$ і визначає норму

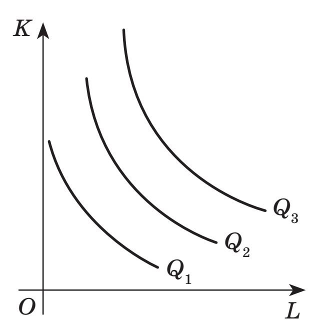


Рис. 1. Карта ізоквант

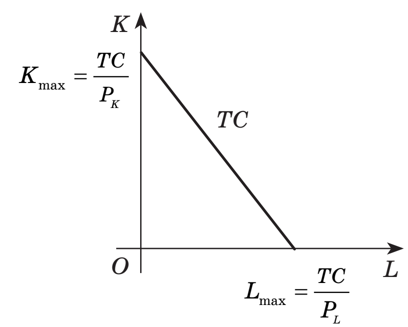


Рис. 2. Ізокоста

заміщення капіталу однією додатковою одиницею праці за умови незмінної загальної вартості продукції. При зміні цих факторів нахил ізокости змінюється.

Мінімізація витрат — процес досягнення фірмою таких обсягів використання ресурсів, коли вартість набору ресурсів, необхідних для забезпечення певного обсягу випуску продукції, буде найменшою порівняно з вартістю всіх інших наборів ресурсів, які забезпечують такий самий обсяг випуску.

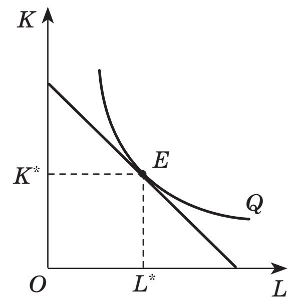


Рис. 3. Мінімізація витрат

Точка мінімальних витрат при фіксованому обсязі виробництва — це точка дотику ізокванти, яка відповідає даному обсягу виробництва, до ізокости (точка E на рис. 3).

Якщо рівень вартості товару зростає, а ціни не змінюються, то ізокоста зсувається вправо. У точці E ізокоста є дотичною до ізокванти, їх нахили співпадають. Оскільки нахил ізокости — це співвідношення цін ресурсів, а нахил ізокванти — гранична норма технологічної заміни $(MRTS_{LK})$, то умова мінімізації витрат матиме вигляд:

$$MRTS_{LK}=\frac{MP_L}{MP_K}=\frac{P_L}{P_K};\quad \frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K},$$

де MP_L — граничний продукт праці; MP_K — граничний продукт капіталу.

Поки зазначена рівність не досягнута, підприємство може покращити своє становище.

Гранична норма технологічної заміни $(MRTS_{LK})$ показує, від якої кількості одного фактора треба відмовитись, щоб залучити у виробництво додаткову одиницю іншого фактора. Зокрема, $MRTS_{LK}$ показує, скільки одиниць капіталу може замінити одиницю праці, а $MRTS_{LK}$ — навпаки, скільки одиниць праці може замінити одиницю капіталу.

Отже, щоб мінімізувати витрати, фірма повинна вибрати такий рівень витрат факторів виробництва (праці L, капіталу K тощо), при якому відношення граничного продукту кожного фактора до витрат на нього є однаковим для всіх факторів, що використовуються у виробництві.

Відношення $\frac{P_L}{P_K}$ характеризує норму, за якою підприємство може заміщувати один ресурс іншим, купуючи ресурси на ринку.

Відношення $\frac{MP_L}{MP_K}$ характеризує норму, за якою підприємство може заміщувати один ресурс іншим у виробництві.

Якщо $\frac{MP_L}{MP_K}>\frac{P_L}{P_K}$, то випуск товару може бути збільшений (за таких самих витрат) шляхом заміщення капіталу працею, а якщо $\frac{MP_L}{MP_K}<\frac{P_L}{P_K}$, то випуск товару може бути збільшений шляхом заміщення праці капіталом.

Рівність $\frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K}$ означає, що остання грошова одиниця, витрачена на працю, дасть такий самий приріст випуску, що й остання грошова одиниця, витрачена на капітал.

Алгебраїчно точку мінімізації витрат можна знайти шляхом розв'язання системи двох рівнянь: $\begin{cases} TC=P_L\cdot L+P_K\cdot K, \\ \dfrac{MP_L}{P_L}=\dfrac{MP_K}{P_K}. \end{cases}$

Типовою виробничою функцією є *функція Кобба — Дугласа*: $Q=A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}$, де $A>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$ – додатні константи.

Якщо $\alpha+\beta=1$, то ефект масштабу постійний (графічно ізокванти рівновіддалені).

Якщо $\alpha+\beta<1$, то ефект масштабу є спадним (графічно ізокванти значно віддалені одна від одної).

Якщо $\alpha+\beta>1$, то ефект масштабу є зростаючим (графічно ізокванти розташовані близько одна до одної).

Збільшуючи кількість фінансових ресурсів на всі фактори виробництва, фірма розвиватиметься та переходитиме до більших масштабів виробництва.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. У виробництві продукції фірма застосовує два види ресурсів — працю та капітал. Ціна 1 од. праці становить 5 грн за годину, ціна 1 од. капіталу — 12 грн за годину. Граничний продукт праці дорівнює 50 од., граничний продукт капіталу — 120 од. Визначте, чи мінімізує фірма свої витрати за даних умов.

Розв'язання

Фірма мінімізує свої витрати за умови: $\frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K}$. Підставимо відомі з умови задачі дані: $\frac{50}{5}=\frac{120}{12}=10$.

Оскільки умова мінімізації витрат виконується, то співвідношення ресурсів є оптимальним, тобто фірма мінімізує свої витрати.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Випуск продукції (у тис. од. на місяць) задано рівнянням $Q=\sqrt{LK}$, де L —кількість робітників; K — кількість станків. На виробництві працює 15 робітників, причому один робітник обслуговує 4 станки. У якому випадку збільшення кількості станків на 1 од. приведе до збільшення продукції менш ніж на 1 тис. од. на місяць? Знайдіть приріст випуску продукції після прийому на роботу ще одного робітника.

Розв'язання

Знайдемо граничний продукт капіталу:

$MP_K=\frac{dQ(L,K)}{dK}=\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$. За умовою задачі $MP_K<1$, тоді $\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}<1$.

Звідси $L<4K$.

Отже, 60-й станок дасть приріст продукції менш ніж на 1 тис. од. на місяць.

Знайдемо граничний продукт праці: $MP_L=\frac{dQ(K,l)}{dL}=\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}$.

За умовою задачі $K=4L$, тоді $MP_L=\frac{\sqrt{4L}}{2\sqrt{L}}=1$ (тис. од.).

Отже, приріст випуску продукції після прийому на роботу ще одного робітника становитиме 1 тис. од.

Задача 3. Виробнича функція має вигляд $Q=K\sqrt{L}$. Витрати виробництва становлять 180 гр. од. за годину, ціна 1 од. праці дорівнює 3 гр. од за годину, ціна 1 од. капіталу становить 9 гр. од. за годину. Запишіть рівняння ізокости та визначте, за яких умов фірма мінімізує свої витрати.

Розв'язання

Запишемо умову мінімізації витрат: $MRTS_{LK}=\frac{MP_L}{MP_K}=\frac{P_L}{P_K}$;

$\frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K}$.

Знайдемо граничний продукт праці та граничний продукт капіталу: $MP_K=\frac{dQ(L,K)}{dK}=\sqrt{L}$; $MP_L=\frac{dQ(K,L)}{dL}=\frac{K}{2\sqrt{L}}$.

Звідси $\frac{K}{2L}=\frac{3}{9}$.

Запишемо рівняння ізокости за відомими з умови задачі даними: $180=3L+9K$. Визначимо умови мінімізації витрат за допомогою системи: $\begin{cases}TC=P_L\cdot L+P_K\cdot K,\\ \frac{MP_L}{P_L}=\frac{MP_K}{P_K};\end{cases}$ $\begin{cases}180=3L+9K,\\ \frac{K}{2L}=\frac{1}{3}.\end{cases}$

Отже, фірма мінімізує свої витрати за таких значень факторів праці та капіталу: $L=20$; $K=13\frac{1}{3}$.

Задача 4. Виробнича функція фірми має вигляд $Q=4\cdot L^{\frac{2}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}$. Фірма прагне виробляти 8 од. продукції за годину робочого часу. При цьому відомо, що ціна 1 од. капіталу становить 3 грн за годину, а ціна 1 од. праці за годину — у 4 рази дешевше. Визначте комбінацію ресурсів, яка забезпечить мінімізацію витрат на даний обсяг виробництва та мінімальну вартість виробництва.

Розв'язання

З рівняння виробничої функції: $Q=4\cdot L^{\frac{2}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}$; $8=4\cdot L^{\frac{2}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}$;

$2=L^{\frac{2}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}$; $K^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{L^{\frac{2}{3}}}$; $K=\frac{8}{L^2}$. За відомими з умови задачі даними запишемо рівняння функції загальної вартості виробництва:

$TC=4K+L$; $TC=4\frac{8}{L^2}+L=\frac{32}{L^2}+L$.

Щоб знайти мінімальне значення функції загальної вартості виробництва, знайдемо похідну цієї функції та прирівняємо її до нуля: $TC'=-64L^{-3}+1$; $-64L^{-3}+1=0$; $L=4$. Звідси $K=\frac{8}{4^2}=\frac{1}{2}$. Тоді $TC=4K+L=4\cdot\frac{1}{2}+4=6$ (грн).

Отже, мінімальна вартість виробництва за годину становить 6 грн при використанні 4 од. праці та $\frac{1}{2}$ од. капіталу.

Заняття 7–8

Тема. ***Еластичність попиту***

Мета: ознайомити учнів із формулами для обчислення еластичності попиту та еластичності пропозиції за допомогою похідної; формувати вміння обчислювати еластичність попиту (пропозиції) за допомогою похідної.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: еластичність попиту, види еластичності попиту, формули для обчислення різних видів еластичності попиту, еластичність пропозиції, формули для обчислення еластичності.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Нагадаємо, що з поняттям еластичності учні ознайомилися у 10-му класі. Розглянемо докладніше це поняття.

Еластичність (E) — міра чутливості однієї величини до змін іншої. Еластичність показує, наскільки зміниться один економічний показник при зміні іншого на одиницю.

Еластичність функції $y=f(x)$ показує відносну зміну значення функції y в розрахунку на одиницю відносної зміни аргументу x.

Еластичність попиту за ціною визначається за формулами:

$$E_D=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_1}{Q_1}\text{ , або }E_D=Q'(P)\frac{P}{Q}.$$

Еластичність попиту за доходом визначається за формулами:

$$E_I=\frac{\Delta Q}{\Delta I}\cdot\frac{I}{Q}\text{ , або }E_I=Q'(I)\frac{I}{Q}.$$

На відміну від еластичності попиту за ціною еластичність попиту за доходом залежить не від руху по одній кривій попиту, а від зміщення цієї кривої.

Перехресна еластичність попиту обчислюється за формулами: $E_{XY}=\frac{\Delta Q_X}{\Delta P_Y}\cdot\frac{P_Y}{Q_X}$, або $E_{XY}=\frac{dQ_X}{dP_Y}\cdot\frac{P_Y}{Q_X}$, де $\frac{dQ_X}{dP_Y}$ — частинна похідна функції попиту за ціною P_Y.

Еластичність пропозиції обчислюється за формулами:

$$E_S=\frac{\Delta Q_S}{\Delta P}\cdot\frac{P}{Q_S}\text{ , або }E_S=Q_S'(P)\frac{P}{Q_S}.$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Функцію попиту задано рівнянням $Q_D=3P^2-5P+7$. Знайдіть коефіцієнт еластичності попиту за ціною 4 гр. од. за 1 од. товару.

Розв'язання

Коефіцієнт еластичності попиту за ціною визначається за формулою: $E_D=Q'(P)\frac{P}{Q}$.

Знайдемо похідну функції попиту за ціною: $Q_D'(P)=6P-5$.

Таким чином, за ціною 4 гр. од. за 1 од. товару $(P=4)$ обсяг продажу дорівнює $Q=35$. Тоді отримаємо, що коефіцієнт еластичності попиту за заданою ціною: $E_D=Q'(P)\frac{P}{Q}=(6\cdot4-5)\cdot\frac{4}{35}=2{,}17$.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Функцію попиту на товар X задано рівнянням $Q_X=10-3P_x+P_Y$, де P_X — ціна товару X; P_Y — ціна товару Y. Визначте коефіцієнт перехресної еластичності попиту на товар X за ціною товару Y, якщо відомо, що $P_X=3$, $P_Y=5$. Зробіть висновок щодо взаємозалежності товарів X і Y.

Розв'язання

Коефіцієнт перехресної еластичності попиту обчислюється за формулою: $E_{XY}=Q_X'(P_Y)\cdot\frac{P_Y}{Q_X}$. Обчислимо частинну похідну: $Q_X'(P_Y)=1$. За умовою задачі $P_X=3$; $P_Y=5$. Тоді: $Q_X=10-3\cdot3+5=6$. Обчислимо коефіцієнт перехресної еластичності попиту за ціною: $E_{XY}=Q_X'(P_Y)\cdot\frac{P_Y}{Q_X}=1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$.

Оскільки $E_{XY}>0$, то товари X і Y є товарами-замінниками.

Задача 3. Функцію попиту на товар X задано рівнянням $Q_X=46-2P_X+3P_Y$. Ціна товару Y дорівнює 7 гр. од. Визначте, за якої ціни товару X (у грн) збільшення ціни товару Y на 1 % приведе до збільшення обсягу попиту на товар X на 0,5 %.

Розв'язання

Перехресна еластичність обчислюється за формулою: $E_{XY}=\frac{\Delta Q_X\ \%}{\Delta P_Y\ \%}$. Тоді $E_{XY}=\frac{0{,}5\ \%}{1\ \%}=0{,}5$. Знайдемо, за якої ціни товару X збільшення ціни товару Y на 1 % приведе до збільшення обсягу попиту на товар X на $0{,}5\ \%$. Для цього з формули для обчислення перехресної еластичності за допомогою частинної похідної виразимо Q_X: $E_{XY}=Q'_X\left(P_Y\right)\cdot\frac{P_Y}{Q_X}$; $Q_X=\frac{Q'_X\left(P_Y\right)\cdot P_Y}{E_{XY}}$.

Обчислимо частинну похідну: $Q'_X\left(P_Y\right)=3$.

Тоді $Q_X=\frac{3\cdot7}{0{,}5}=42$; $42=46-2\cdot P_X+3\cdot7$; $P_X=3$.

Отже, збільшення ціни товару Y на $1\ \%$ приведе до збільшення обсягу попиту на товар X на $0{,}5\ \%$, якщо ціна товару X становитиме 3 грн.

Задача 4. Функцію пропозиції задано рівнянням $Q_S=3P-2$, а функцію попиту — рівнянням $Q_D=13-2P$. Визначте рівноважну ціну й рівноважну кількість товару на ринку. Знайдіть еластичність попиту та еластичність пропозиції у точці рівноваги.

Розв'язання

Спочатку знайдемо параметри рівноваги. Для цього прирівняємо праві часини рівнянь функцій попиту та пропозиції: $Q_D=Q_S$; $3P-2=13-2P$; $P=3$; $Q=7$.

Еластичність попиту у точці рівноваги визначимо за формулою: $E_D=Q'(P)\frac{P}{Q}$.

Знайдемо похідну функції попиту за ціною: $Q'_D(P)=-2$. Тоді $E_D=(-2)\frac{3}{7}=-\frac{6}{7}$. $\left|E_D\right|<1$, отже, попит в точці рівноваги нееластичний.

Аналогічно знайдемо еластичність пропозиції у точці рівноваги: $E_S=Q'_S(P)\frac{P}{Q_S}$. Тоді $Q'_S(P)=3$; $E_S=3\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{7}$. $\left|E_S\right|>1$, отже, пропозиція в точці рівноваги еластична.

Задача 5. Функцію попиту задано рівнянням $P=20-Q_D$, де P_D — обсяг попиту (тис. од.); функцію пропозиції — рівнянням $P=2+Q_S$, де Q_S — обсяг пропозиції (тис. од.). Визначте параметри рівноваги, еластичність попиту та еластичність пропозиції у точці рівноваги.

Розв'язання

Знайдемо параметри рівноваги. Для цього прирівняємо праві часини рівнянь функцій попиту та пропозиції: $Q_D=Q_S$ або $P_D=P_S$; $20-Q=2+Q$; $P=11$; $Q=9$. Еластичність попиту в точці рівноваги визначимо за формулою: $E_D=Q'(P)\frac{P}{Q}$. Знайдемо похідну функції попиту за ціною: $Q'_D(P)=-1$. Тоді $E_D=(-1)\frac{11}{9}=-\frac{11}{9}$. $\left|E_D\right|>1$, отже, попит у точці рівноваги еластичний.

Аналогічно знайдемо еластичність пропозиції: $E_S=Q'_S(P)\frac{P}{Q_S}$. Визначимо похідну функції пропозиції за ціною: $Q'_S(P)=1$. Тоді $E_S=1\cdot\frac{11}{9}=\frac{11}{9}$. $\left|E_S\right|>1$, отже, пропозиція в точці рівноваги еластична.

Задача 6. Функцію попиту задано рівнянням $Q_D=8-3P$, функцію пропозиції — рівнянням $Q_S=1+4P$. Визначте еластичність попиту та еластичність пропозиції у точці рівноваги.

Розв'язання

Знайдемо рівноважну ціну та обсяг продажу. Для цього прирівняємо праві частини рівнянь функції попиту та функції пропозиції: $8-3P=1+4P$; $P=1$; $Q=5$.

Визначимо еластичність попиту за ціною в точці рівноваги: $E_D=Q'_D(P)\frac{P}{Q}=(-3)\cdot\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}$. $\left|E_D\right|<1$, отже, попит в точці рівноваги нееластичний.

Аналогічно, еластичність пропозиції за ціною в точці рівноваги:

$E_S=Q'_S(P)\frac{P}{Q_S}=4\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. $\left|E_S\right|<1$, отже, пропозиція в точці рівноваги нееластична.

Задача 7. Функцію попиту на товар задано рівнянням $Q_D=45-20P_X+3P_Y+10\cdot I$, де Q_D — обсяг попиту; P_X — ціна товару X; P_Y – ціна товару Y; I — дохід споживача. Відомо, що $P_X=10$ грн, $P_Y=50$ грн, $I=1000$ грн. Визначте: 1) величину попиту на товар X за даних умов; 2) еластичність попиту за даною ціною товару X та охарактеризуйте вид товару X; 3) еластичність попиту за даним доходом та охарактеризуйте вид товару X; 4) перехресну еластичність попиту й охарактеризуйте вид товару X.

Розв'язання

1) За умовою задачі $P_X = 10$ грн; $P_Y = 50$ грн; $I = 1000$ грн. Підставимо ці дані у рівняння функції попиту та визначимо обсяг попиту на товар X: $Q_X = 45 - 20 \cdot 10 + 3 \cdot 50 + 10 \cdot 1000 = 9995$.

2) Еластичність попиту за ціною на товар X обчислимо за формулою: $E_D = Q'_X(P_X)\frac{P_X}{Q_X}$; $Q'_D(P_X) = -20$; $E_D = (-20)\frac{10}{9995} = -0{,}02$. $|E_D| < 1$, отже, попит на товар X нееластичний.

3) Еластичність попиту за доходом на товар X обчислимо за формулою: $E_I = Q'(I)\frac{I}{Q}$; $Q'_D(I) = 10$; $E_I = 10\frac{1000}{9995} = 1{,}0005$. Оскільки $E_I > 0$, то товар X є нормальним благом (тобто товаром, у якого багато замінників).

4) Перехресну еластичність попиту обчислимо за формулою: $E_{XY} = \frac{dQ_X}{dP_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X}$; $\frac{dQ_X}{dP_Y} = 3$; $E_{XY} = 3 \cdot \frac{50}{9995} = 0{,}015$. Оскільки $E_{XY} > 0$, то товар X є товаром-субститутом (товаром-замінником).

Контрольні запитання до теми 1

1. Наведіть приклади, які ілюструють економічний зміст похідної.
2. Що називають граничним аналізом?
3. Назвіть один із основних методів дослідження мікроекономіки.
4. Запишіть означення понять:
   а) швидкість росту населення;
   б) ріст продуктивності праці;
   в) швидкість витрат ресурсів;
   г) гранична виручка;
   д) граничні витрати;
   е) швидкість зносу обкладання.
5. У чому полягає відмінність між поняттями «прибуток» і «дохід»?
6. Дайте означення граничного прибутку та граничного доходу.
7. Що таке максимальний прибуток і як його знайти (графічно та аналітично)?
8. Що таке максимальний дохід і як його знайти (графічно та аналітично)?

ТЕМА 2. ПОКАЗНИКОВА, ЛОГАРИФМІЧНА ТА СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЇ НА ПРИКЛАДІ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ

Заняття 9

Тема. ***Розв'язування задач економічного змісту за допомогою показникової функції***

Мета: ознайомити учнів із можливим застосуванням показникової функції до розв'язування задач економічного змісту; формувати вміння розв'язувати задачі економічного змісту за допомогою показникової функції.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: показникова функція, геометрична прогресія.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Новий матеріал вивчатимемо за допомогою методу доцільних задач (тобто під час розв'язування задач).

Задача 1. Підприємство має 10 000 од. скляного посуду. Відомо, що за кожну одиницю часу виходить з ладу 5 % цієї продукції. Запишіть кількість одиниць продукції, що залишилась до моменту часу x, у вигляді функції.

Розв'язання

Нехай y — кількість одиниць продукції, що залишилась до моменту часу x. Тоді за умовою задачі: $y = 10\,000 \cdot 0{,}95^x$.

Знайдемо кілька значень функції y:

1) якщо $x = 1$, то $y = 9500$ (од.);

2) якщо $x = 2$, то $y = 9025$ (од.) і т. д.

Тобто від початку відліку часу до моменту часу $x = 1$ вийшло з ладу 500 од. скляного посуду, до моменту часу $x = 2$ — 975 од. і т.д.

Отже, функцію кількості одиниць продукції, що залишилась до моменту часу x, можна записати таким чином: $y = 10\,000 - 10\,000 \cdot 0{,}05^x$, або $y = 10000 \cdot 0{,}95^x$.

Разом з учнями можна побудувати графіки отриманих функцій.

Розглянемо приклад взаємозв'язку між показниковою функцією і геометричною прогресією.

Нехай бізнесмен вклав у свою підприємницьку діяльність капітал y_0 (початковий капітал) і через рівні проміжки часу (наприклад, наприкінці кожного року) він отримує прибуток з цього капіталу. Припустимо, норма прибутку p незмінна, тоді через рік капітал становитиме $y_0(1+p)$; через два роки — $y_0(1+p)^2$; через x років — $y_0(1+p)^x$. Позначимо цю прогресію через $r=1+p$, тоді $y=y_0\cdot r^x$ — показникова функція. Ця функція відображає зміну величини рівновіддалених членів геометричної прогресії, де r — знаменник прогресії; y_0 — її початковий член.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 2. Нехай початковий капітал $y=1000$ грн, знаменник прогресії $r=1{,}1$. Знайдіть величину капіталу в проміжку $[0;4]$ років.

Розв'язання

Якщо знаменник прогресії $r=1{,}1$, то це значить, що відбувається щорічне збільшення капіталу на $10\ \%$. Тоді величина капіталу через x років дорівнюватиме: $y=1000\cdot 1{,}1^x$.

Складемо таблицю значень даної функціональної залежності в проміжку $[0;4]$ років, де x — кількість років; y — величина капіталу (у грн):

x	0	1	2	3	4
y	1000	1100	1210	1331	1464,1

Задача 3. Продуктивність праці на підприємстві збільшується щороку на однакову кількість відсотків, причому за останні 3 роки вона зросла на $25\ \%$. На скільки відсотків продуктивність праці збільшувалась щорічно?

Розв'язання

Перед розв'язанням даної задачі слід нагадати учням означення продуктивності праці (це ефективність затрат праці, тобто кількість продукції, яка виробляється робітником за одиницю часу).

Нехай a_1 — початкова продуктивність праці; p — кількість відсотків, на яку збільшується продуктивність праці щороку. Тоді через рік продуктивність праці становитиме $a_1(1+0{,}01p)$; через 2 роки — $a_1(1+0{,}01p)^2$; через n років — $a_1(1+0{,}01p)^n$. За умовою задачі: $(1+0{,}01p)^3=1{,}25$; $1+0{,}01p=\sqrt[3]{1{,}25}$. Звідси $p\approx 8\ \%$.

Тобто продуктивність праці щорічно збільшувалась приблизно на $8\ \%$.

Італійський економіст Парето сформулював теорему про розподіл доходів у капіталістичному суспільстві, яку в економіці називають *законом Парето*: якщо через y позначити число осіб, що мають дохід не менше x гр. од. за певний проміжок часу, то $y=\dfrac{a}{x^m}$, де a, m — сталі величини.

Закон Парето достатньо точно описує розподіл значних доходів, тоді як для низьких доходів він не справджується.

Задача 4. Нехай у суспільстві розподіл доходів визначається рівнянням $y=\dfrac{4\,000\,000\,000}{x^{1{,}5}}$. Знайдіть: 1) число осіб, що мають дохід, який перевищує 100 000 гр. од. на рік; 2) найнижчий дохід серед 50 найбагатших осіб.

Розв'язання

1) За умовою задачі $x=100\,000$, тоді $y=\dfrac{4\,000\,000\,000}{100\,000^{1{,}5}}$.

Логарифмуємо обидві частини останньої рівності, тоді одержимо: $\lg y=\lg\dfrac{4\,000\,000\,000}{100\,000^{1{,}5}}=\lg 4\,000\,000\,000-1{,}5\lg 100\,000=9{,}6021-7{,}5=$ $=2{,}1021$. Отже, $\lg y=2{,}1021$. Звідси $y=10^{2{,}1021}\approx 126$.

Тобто 126 осіб мають дохід, що перевищує 100 000 гр. од. на рік.

2) За умовою задачі $50=\dfrac{4\,000\,000\,000}{x^{1{,}5}}$. Розв'язавши це рівняння, одержимо: $50x^{1{,}5}=4\,000\,000\,000$; $x^{1{,}5}=80\,000\,000$. Логарифмуємо обидві частини останньої рівності: $1{,}5\lg x=\lg 80\,000\,000$; $1{,}5\lg x=7{,}9031$; $\lg x=5{,}2687$. Звідси $x=10^{5{,}2687}$; $x\approx 185\,000$.

Отже, найнижчий дохід серед 50 найбагатших осіб (тобто дохід 50-ї особи) становить 185 000 гр. од. на рік.

Заняття 10–11

Тема. **Задачі про подвоєння / потроєння грошей**

Мета: ознайомити учнів із задачею про подвоєння / потроєння грошей; формувати вміння знаходити час, необхідний для подвоєння / потроєння суми компаунда.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: простий відсоток, складний відсоток (компаунд), конверсійний період.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Новий матеріал вивчатимемо за допомогою методу доцільних задач (тобто під час розв'язування задач).

Задача 1. Відсоткова ставка дорівнює 16 %, нарахування відсотків проводяться кожні півроку. Скільки треба часу, щоб початкова сума подвоїлася?

Розв'язання

Запишемо формулу складного відсотка: $S=P(1+i)^n$, де n — кількість конверсійних періодів (загальна кількість нарахувань).

Підставимо відомі з умови задачі дані: $2P=P(1+i)^n$, скоротимо на P і логарифмуємо обидві частини рівняння: $\ln 2=n\ln(1+i)$; $n=\frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$. За умовою задачі відсоткова ставка дорівнює 16 % $(r=0{,}16)$. Оскільки $m=2$, то $i=\frac{r}{m}=\frac{0{,}16}{2}=0{,}08$. Тоді $n=\frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}08)}\approx$

≈ 9 (конверсійних періодів).

Отже, початковий капітал подвоїться приблизно через 9 конверсійних періодів, а саме через $\frac{9}{2}=4{,}5$ року (оскільки за умовою задачі в році 2 конверсійних періоди).

Подібні до цієї задачі можна розв'язувати у загальному вигляді (як для простих, так і для складних відсотків). При цьому отримані результати варто узагальнити у вигляді таблиці.

Метод простих відсотків	Метод складних відсотків зі щорічним компаундом
$t=\frac{N-1}{r}$	$t=\frac{\ln N}{\ln(1+r)}$ або $t=\frac{\ln N}{m\cdot\ln(1+i)}$
N — додатнє число, яке показує кратність збільшення початкової суми; t — час (у роках); r — річна ставка (у відсотках); m — кількість нарахувань за рік; $i=\frac{r}{m}$ — відсоткова ставка за конверсійний період	

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 2. На який термін треба вкласти 1000 грн, щоб ця сума потроїлась, за умови нарахування складних відсотків щоквартально і річної ставки 24 %?

Розв'язання

Підставимо відомі з умови задачі дані у формулу складних відсотків: $t=\frac{\ln N}{m\cdot\ln(1+i)}=\frac{\ln 3}{4\cdot\ln(1+0{,}06)}\approx 4{,}7$ (року).

Отже, щоб отримати 3000 грн за даних умов, необхідно приблизно 4,7 року.

Задача 3. Визначте термін (у роках), необхідний для збільшення капіталу в 3 рази, застосовуючи методи простих і складних відсотків, якщо річна ставка в обох випадках становить 12 %, а компаунд у випадку складних відсотків щорічний.

Розв'язання

Обчислимо термін вкладу за методом простих відсотків: $t=\frac{N-1}{r}=\frac{3-1}{0{,}12}\approx 16{,}7$ (року).

Обчислимо термін вкладу за методом складних відсотків: $t=\frac{\ln N}{\ln(1+r)}=\frac{\ln 3}{\ln 1{,}12}\approx 9{,}7$ (року).

Отже, для збільшення початкового капіталу в 3 рази за умови нарахування простих відсотків за даних умов необхідно приблизно 16,7 року, а за умови нарахування складних відсотків — приблизно 9,7 року.

Задача 4. Визначте час (у роках), необхідний для збільшення капіталу в 5 разів, застосовуючи методи простих і складних відсотків, якщо річна ставка в обох випадках становить 18 %, а компаунд у випадку складних відсотків піврічний.

Розв'язання

Обчислимо термін вкладу за методом простих відсотків: $t = \frac{N-1}{r} = \frac{5-1}{0,18} \approx 22,2$ (року).

Обчислимо термін вкладу за методом складних відсотків: $t = \frac{\ln N}{m \cdot \ln(1+i)} = \frac{\ln 5}{2 \cdot \ln 1,09} \approx 9,34$ (року).

Отже, для збільшення початкового капіталу в 5 разів за умови нарахування простих відсотків за даних умов необхідно приблизно 22,2 року, а за умови нарахування складних відсотків — приблизно 9,34 року.

Заняття 12

Тема. ***Еквівалентна та ефективна ставки відсотка***

Мета: ознайомити учнів із поняттями еквівалентної та ефективної ставок відсотка; формувати вміння їх обчислювати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: відсоткова ставка, компаунд.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Для розрахунку рівної ставки складного відсотка у багатьох випадках необхідно знати частоту конверсій і повний річний приріст на кожну грошову одиницю початкового капіталу. Для цього введемо нове поняття — ефективна ставка.

Ефективна ставка використовується для порівняння ставок прибутку фінансових організацій.

Щоб визначити ефективну ставку s, яка відповідає річній ставці r, що нараховується m разів на рік, треба розв'язати рівняння $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = 1+s$ відносно s: $s = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$.

Дві будь-які ставки відсотка, що дають таку саму кінцеву суму наприкінці року, називають *еквівалентними ставками*.

У фінансовій математиці поняття ставки відсотка й еквівалентної ставки є взаємозамінними.

Отже, якщо ставки відсотків еквівалентні, маємо:

$$P \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^m = P \cdot \left(1+\frac{l}{k}\right)^k,$$

де r і l — річні ставки (одна з яких невідома); m і k — кількість нарахувань відсотків за рік для заданих річних ставок.

Скоротимо обидві частини рівняння на P: $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \left(1+\frac{l}{k}\right)^k$.

Одержуємо рівняння, яке можна розв'язати відносно r або l (залежно від того, яку відсоткову ставку треба знайти). Так само обчислюємо еквівалентні ставки.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Визначте ефективну ставку для щомісячного компаунда зі ставкою 6 %.

Розв'язання

Нехай s — ефективна ставка.

Тоді $s = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0,0617$.

Отже, ефективна ставка для щомісячного компаунда зі ставкою становить 6,17 % щорічного компаунда.

Задача 2. Визначте відсоткову ставку для щомісячного компаунда, яка буде еквівалентною відсотковій ставці, що дорівнює 8 % квартального компаунда.

Розв'язання

Нехай r — еквівалентна ставка, яка нараховується щомісячно. Тоді $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} = \left(1+\frac{0,08}{4}\right)^4$; $1+\frac{r}{12} = \sqrt[12]{1,02^4}$. Звідси $r = 0,075$.

Таким чином, еквівалентною відсотковій ставці 8 % для щоквартального компаунда буде ставка 7,5 % за умови щомісячного компаунда.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 3. Знайдіть ефективну ставку для піврічного компаунда зі ставкою 16 %.

Розв'язання

Запишемо формулу для обчислення ефективної ставки:

$$s=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1.$$

Підставимо у формулу відомі з умови задачі дані:

$$s=\left(1+\frac{0{,}16}{2}\right)^2-1=0{,}1664.$$

Отже, ефективною ставкою для піврічного компаунда зі ставкою 16 % буде ставка 16,64 % щорічного компаунда.

Задача 4. Перший банк сплачує своїм клієнтам прибуток зі ставкою 8,65 % при щоквартальному нарахуванні відсотків, другий банк сплачує 8,7 % із піврічним нарахуванням відсотків. Який із банків дає своїм вкладникам більший прибуток?

Розв'язання

Знайдемо ефективну ставку для кожного банку. Перший банк зі ставкою 8,65 % із квартальним нарахуванням відсотків дає таку ефективну ставку: $\left(1+\frac{0{,}0865}{4}\right)^4-1\approx 8{,}93\ \%$. Другий банк зі ставкою 8,7 % із піврічним нарахуванням відсотків дає таку ефективну ставку: $\left(1+\frac{0{,}087}{4}\right)^2-1\approx 8{,}89\ \%$.

Отже, перший банк, який має більш ефективну ставку, дає своїм клієнтам більший прибуток.

Заняття 13–14

Тема. ***Неперервний компаунд***

Мета: ознайомити учнів із поняттям неперервного компаунда та його формулою; формувати вміння обчислювати майбутню та поточну вартості при неперервному нарахуванні відсотків.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: компаунд, річна ставка, термін вкладу, майбутня вартість, поточна вартість.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Якщо нарахування прибутку здійснюють безперервно із номінальною ставкою r, то майбутня вартість (S) дорівнює:

$$S=Pe^{rt}.$$

Поточна вартість (P) при неперервному компаунді дорівнює:

$$P=\frac{S}{e^{rt}},$$

де S — майбутня вартість; e — сума компаунда; r — річна ставка; t — термін вкладу.

Розглянемо питання обчислення ефективної ставки при неперервному компаунді. Для цього необхідно знайти еквівалентну ставку для щорічного компаунда. Розглянемо рівність: $e^{r\cdot 1}=1+s$, де $e^{r\cdot 1}$ — сума компаунда на 1 грн інвестицій терміном на 1 рік при річній ставці r за умови неперервного компаунда; $1+s$ — сума компаунда на 1 грн інвестицій терміном на 1 рік при річній ставці s для щорічного компаунда.

Розв'яжемо рівняння відносно s. Одержимо рівняння для обчислення ефективної ставки при неперервному компаунді:

$$s=e^r-1.$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. У банк вклали 25 000 грн зі ставкою 15 % при неперервному компаунді на 4 роки. Знайдіть суму, яка буде на рахунку вкладника через 4 роки.

Розв'язання

Обчислимо майбутню вартість відсотків: $S=P\cdot e^{rt}=25\,000\times$ $\times e^{0{,}15\cdot 4}\approx 45\,553$ (грн).

Отже, через 4 роки на рахунку вкладника буде приблизно 45 553 грн.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Знайдіть ефективну річну ставку відсотка, яка відповідає ставці 12 % при неперервному компаунді.

Розв'язання

Ефективна ставка при інвестуванні 1 грн за умови ставки 12 % при неперервному компаунді дорівнює: $s=e^{0{,}12}-1\approx 12{,}75\ (\%)$.

Отже, відсоткова ставка 12 % при неперервному компаунді еквівалентна ставці приблизно 12,75 % при щорічному компаунді.

Задача 3. У банку прибуток нараховується зі ставкою 10 % неперервно. За підрахунками підприємця через 4 роки йому знадобиться 14 000 грн. Визначте, яку суму треба зараз вкласти в банк підприємцю, щоб отримати потрібну суму.

Розв'язання

Обчислимо поточну вартість при неперервному компаунді:

$P = \frac{S}{e^{rt}} = \frac{14000}{e^{0{,}1\cdot 4}} \approx 9384$ (грн).

Тобто, щоб за даних умов через 4 роки отримати 14 000 грн, зараз підприємцю треба вкласти приблизно 9384 грн.

Контрольні запитання до теми 2

1. Що таке компаунд?
2. Чи можна визначити час, необхідний для збільшення початкової суми грошей вдвічі (втричі), якщо відома річна ставка? Наведіть приклади для простих і складних відсотків.
3. Сформулюйте теорему про розподіл доходів за умови капіталістичних відносин у суспільстві.
4. Запишіть формулу для обчислення загальної суми за умови неперервного нарахування відсотків.
5. Чим відрізняється неперервне нарахування відсотків від нарахування відсотків за конверсійними періодами?
6. За допомогою якого показника можна порівняти ставки прибутку фінансових організацій?
7. Як обчислити еквівалентну ставку?
8. Складіть задачу на порівняння прибутковості двох або більше банків. Розв'яжіть цю задачу.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ЕКОНОМІЦІ

Заняття 15–16

Тема. ***Математичне сподівання, дисперсія (коефіцієнт ризику)***

Мета: ознайомити учнів із поняттями математичного сподівання, дисперсії (коефіцієнту ризику); формувати вміння їх обчислювати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: математичне сподівання, дисперсія.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Поняття математичного сподівання

Математичне сподівання дискретної випадкової величини $M(X)$ — це сума добутків всіх можливих значень випадкової величини (x_K) і їх імовірність (p_K). Математичне сподівання визначається за формулою: $M(X) = \sum_K x_K p_K$.

Випадкову величину X називають дискретною, якщо вона приймає значення деякої числової послідовності (скінченної або нескінченної).

Поняття дисперсії

Дисперсія випадкової величини $(D(X))$ — це математичне сподівання квадрата різниці випадкової величини (X) і її математичного сподівання (M):

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2.$$

Корінь квадратний із дисперсії називають *середнім квадратичним відхиленням* $(\sigma(X))$ випадкової величини: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення є мірою розсіяння значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

У економічних дослідженнях *дисперсію часто приймають за міру ризику,* тому що вона характеризує розсіяння величини прибутку та його мінливість.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. У фірми є можливість вибору виробництва і реалізації двох наборів товарів широкого вжитку. Економістами фірми було проведено дослідження ринку. Вони встановили можливий прибуток фірми від виробництва і реалізації двох наборів товарів — X і Y (у грн).

X	1000	1500	2000
p	0,2	0,3	0,5
Y	1000	1500	2000
p	0,3	0,4	0,3

Оцініть ступінь ризику та прийміть рішення відносно випуску і реалізації одного із наборів товарів.

Розв'язання

Знайдемо середній можливий прибуток (математичне сподівання) набору товарів X та набору товарів Y:

$M((X)) = 1000 \cdot 0,2 + 1500 \cdot 0,3 + 2000 \cdot 0,5 = 1650;$

$M(Y) = 1000 \cdot 0,3 + 1500 \cdot 0,4 + 2000 \cdot 0,3 = 1500.$

Тобто середній можливий прибуток (математичне сподівання) набору товарів X є більшим.

Обчислимо ступінь ризику для кожного набору товарів:

$D(X) = (1000-1650)^2 \cdot 0,2 + (1500-1650)^2 \cdot 0,3 + (2000-1650)^2 \cdot 0,5 =$

$= 152\,500;\ \sigma(X) = 390,5;$

$D(Y) = (1000-1500)^2 \cdot 0,3 + (1500-1500)^2 \cdot 0,4 + (2000-1500)^2 \cdot 0,3 =$

$= 150\,000;\ \sigma(Y) = 387,3.$

Отже, ступінь ризику, пов'язаний із виробництвом і реалізацією набору X, більший, ніж набору Y, тому варіант Y є менш ризикованим.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Прогнози двох банків (A і B) щодо прибутків на наступний рік (випадкова величина X — прибуток банку A (у грн), випадкова величина Y — прибуток банку B (у грн)):

X	0	200	1000	2000	10 000
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1
Y	100	500	2000	4000	8000
p	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

Визначте економічний ризик (середнє квадратичне відхилення) для вкладників банків A і B.

Розв'язання

Знайдемо середній можливий прибуток (математичне сподівання) для банків A і B відповідно:

$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,1 + 1000 \cdot 0,3 + 2000 \cdot 0,3 + 10\,000 \cdot 0,1 = 1920;$

$M(Y) = 100 \cdot 0,2 + 500 \cdot 0,2 + 2000 \cdot 0,2 + 4000 \cdot 0,3 + 8000 \cdot 0,1 = 2520.$

Обчислимо ступінь економічного ризику для вкладників банків A і B:

$D(X) = (0-1920)^2 \cdot 0,2 + (200-1920)^2 \cdot 0,1 + (1000-1920)^2 \cdot 0,3 +$

$+ (2000-1920)^2 \cdot 0,3 + (10\,000-1920)^2 \cdot 0,1 = 7\,080\,320;$

$\sigma(X) = 2660,887.$

$D(Y) = (1000-2520)^2 \cdot 0,2 + (500-2520)^2 \cdot 0,2 + (2000-2520)^2 \cdot 0,2 +$

$+ (4000-2520)^2 \cdot 0,3 + (8000-2520)^2 \cdot 0,1 = 4\,992\,400;$

$\sigma(Y) = 2234.3679.$

Отже, ступінь ризику, пов'язаний із вкладами у банк A, є вищим, ніж у банк B. Тому вклад у банк B є менш ризикованим.

Заняття 17–18

Тема. ***Найпростіші статистичні показники***

Мета: ознайомити учнів із деякими статистичними показниками.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: середні величини.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо види середніх величин.

Оскільки для більшості соціально-економічних явищ характерною є адитивність обсягів (виробництво цукру, витрати палива тощо), то найпоширенішою серед середніх величин є *середня арифметична*, яка обчислюється діленням загального обсягу товару значення на обсяг сукупності:

$$\bar{x}_{\text{сер. ар}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}, \text{ або } \bar{x}_{\text{сер. ар}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

де x_i — i-е значення; n — обсяг сукупності.

Другим видом середніх величин є *середня в хронологічному ряді*. У задачах на обчислення середньої у хронологічному ряді значення ознак подаються за інтервалами часу, причому інтервали часу повинні бути рівними:

$$\bar{x}_{\text{сер. хрон. р}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

де x_i — n-й річний обсяг товару; n — кількість інтервалів часу.

Іншим типом задач на обчислення середньої у хронологічному ряді є задачі, де наведено *моментні показники*. Моментні показники замінюються середніми як півсума значень на початок і кінець періоду. Якщо моментів більше за два, а інтервали часу між ними рівні, то у чисельнику до півсуми крайніх значень додають усі проміжні, а знаменником є число інтервалів, яке на одиницю менше від числа значень ознаки. За такою формулою визначають *середню хронологічну*:

$$\bar{x}_{\text{сер. хрон}} = \frac{\frac{x_1 + x_n}{2} + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Третім видом з середніх величин є *середня гармонічна.*

Середня гармонічна є відношенням кількості варіант до суми обернених значень цих варіант. Але оскільки вартість реалізованої продукції однакова, то середнє значення ціни товару є середнім гармонічним простим.

Формули для обчислення *середньої гармонічної простої:*

$$\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}, \text{ або } \bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{m + m + \ldots + m}{\frac{m}{x_1} + \frac{m}{x_2} + \ldots + \frac{m}{x_n}},$$

де $x_{\text{сер. гарм.}}$ — середня гармонічна; x_i — варіанти; n — кількість варіант; m — вартість товару.

Якщо вартість реалізованого товару різна, то середнє значення ціни товару є середньою гармонічною зваженою.

Обчислення *середньої гармонічної зваженої* можна здійснити за формулою:

$$\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots + \frac{m_n}{x_n}},$$

де x_i — варіанти; m_i — вартість n-го варіанта.

Використання середньої гармонічної доцільно й обґрунтовано в тих випадках, коли осереднювана ознака є відношенням між логічно пов'язаними величинами (наприклад, відносна величина інтенсивності, структури тощо).

Вибір середньої величини має ґрунтуватись на логічній формулі показника. Зокрема, рентабельність підприємства визначається відношенням прибутку від реалізації до обсягу реалізації.

Розглянемо приклад розв'язання задачі на визначення середньої величини.

Невелике підприємство виробляє два види продукції із різними рівнями рентабельності: виріб A має рентабельність $12\ \%$, а виріб B — рентабельність $7\ \%$. Прибуток від реалізації виробів становить відповідно 240 тис. гр. од. і 210 тис. гр. од. Спроба визначити середню рентабельність як арифметичну не відповідає логічній формулі, така середня величина позбавлена реального економічного змісту. Щоб зберегти зміст, передусім треба визначити обсяг реалізації відношенням прибутку до рентабельності.

У цьому випадку розрахунок відповідає формулі середньої гармонічної: $\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{240 + 210}{\frac{240}{12} + \frac{210}{7}} = \frac{450}{50} = 9\%.$

Формула середньої величини — це лише математична модель логічної формули показника. Важливий методологічний принцип вибору виду середньої величини полягає в тому, щоб розрахунок забезпечив логіко-змістовну суть показника (логічну формулу). Цей принцип є основним критерієм оцінки правильності розв'язків.

Отже, якщо крім значень ознаки відомі значення знаменника логічної формули, то середню величину розраховують за формулою середньої арифметичної. Якщо знаменник невідомий, використовується формула середньої гармонічної.

Розглянемо четвертий вид середніх величин.

Якщо визначальна властивість сукупності формується як добуток індивідуальних значень ознаки, то використовується *середня геометрична:*

$$\bar{x}_{\text{сер. геом}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_1^n x_j},$$

де Π — символ добутку; x_j — відносні величини динаміки, виражені кратним відношенням j-го значення показника до попереднього, $(j-1)$-го.

Коли часові інтервали не є рівними, розрахунок виконують за формулою *середньої геометричної зваженої*:

$$\bar{x}_{\text{сер. геом. зв}} = \sqrt[n]{\prod_{1}^{n} x_j^{n_j}},$$

де $\sum n_j$ — часовий інтервал.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. За місяць страхова компанія виплатила страхове відшкодування за 5 ушкоджених об'єктів відповідно: 18, 27, 22, 30 і 23 тис. гр. од. Визначте середню суму виплат страхового відшкодування.

Розв'язання

Середню суму виплат страхового відшкодування визначимо за формулою середньої арифметичної:

$$\bar{x}_{\text{сер. ар}} = \frac{18+27+22+30+23}{5} = 24 \text{ (тис. гр. од.).}$$

Задача 2. У січні агрофірма продала молокозаводу 405 т молока, у лютому — 415 т молока, а у березні — 440 т молока. Обчисліть середньомісячний продаж молока.

Розв'язання

Середньомісячний продаж молока обчислимо за формулою середньої арифметичної:

$$\bar{x}_{\text{сер. ар}} = \frac{405+415+440}{3} = 420 \text{ (т).}$$

Задача 3. У I кварталі квартальний обіг коштів фірми становив 262 тис. гр. од.; у II кварталі — 313 тис. гр. од.; у III кварталі — 230 тис. гр. од.; у IV кварталі — 345 тис. гр. од. Визначте середньоквартальний обіг біржі.

Розв'язання

Середньоквартальний обіг біржі визначимо за формулою середньої арифметичної:

$$\bar{x}_{\text{сер. ар}} = \frac{\text{Сумарний річний обіг}}{\text{кількість інтервалів}} = \frac{262+313+230+345}{4} = 287{,}5 \text{ (тис. гр. од.).}$$

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 4. На 1 січня кредиторська заборгованість фірми становила 50 тис. гр. од.; на 1 лютого — 75 тис. гр. од.; на 1 березня — 83 тис. гр. од.; на 1 квітня — 78 тис. гр. од. Визначте середньомісячну суму кредиторської заборгованості фірми.

Розв'язання

Щоб обчислити середньомісячну заборгованість, беремо значення наприкінці періодів, тобто на 1 січня та на 1 квітня, та ділимо їх на два: $\frac{(50+78)}{2}$, додаємо значення всередині періоду, тобто на 1 лютого та 1 березня, та ділимо на кількість періодів без одного: $\bar{x}_{\text{сер. хрон}} = \dfrac{\frac{50+78}{2}+75+83}{4-1} = 55{,}5$ (тис. гр. од.).

Отже, щоб підрахувати середньомісячну суму кредиторської заборгованості, необхідно до півсуми значень на початок і кінець періоду, що досліджується, додати показники всередині періоду і поділити отримане значення на кількість періодів без одного.

Задача 5. На початку січня залишки обігових коштів фірми становили 20 тис. гр. од.; на початку лютого — 42 тис. гр. од.; на початку березня — 54 тис. гр. од.; на початку квітня — 70 тис. гр. од. Визначте середньоквартальний залишок обігових коштів.

Розв'язання

Обчислимо середньоквартальний залишок обігових коштів:

$$\bar{x}_{\text{сер. хрон}} = \frac{\frac{20+70}{2}+42+54}{4-1} = 47 \text{ (тис. гр. од.).}$$

Задача 6. Однаковий товар придбали у двох продавців на однакову суму грошей, але у першого продавця за ціною 5 грн за 1 кг, у другого — за ціною 4 грн за 1 кг. Визначте середню ціну товару.

Розв'язання

Підставимо відомі з умови задачі дані у формулу середньої гармонічної: $\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \dfrac{n}{\sum_{1}^{n}\frac{1}{x}} = \dfrac{2}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}} \approx 4{,}4$ (грн).

Отже, середня ціна товару становить 4,4 грн за 1 кг.

Задача 7. У табл. 1 подано відомості про реалізацію товару в трьох крамницях (A, B, C) протягом робочого дня. Визначте середню ціну реалізованого товару.

Таблиця 1

Крамниця	*A*	*B*	*C*
Ціна за 1 кг товару (грн)	4	7	6
Вартість реалізованого товару (грн)	840	840	840

Розв'язання

Розрахунок середньої ціни товару необхідно робити за формулою середньої гармонічної:

$$\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{m+m+\ldots+m}{\frac{m}{x_1}+\frac{m}{x_2}+\ldots+\frac{m}{x_n}} = \frac{840+840+840}{\frac{840}{4}+\frac{840}{7.}+\frac{840}{6}} = 5{,}36 \text{ (грн)}.$$

Отже, середня ціна реалізованого товару дорівнює 5,36 грн.

Задача 8. У продавця *A* придбали товар на суму 150 грн, а у продавця *B* — на суму 300 грн. Визначте середню ціну за кг товару.

Розв'язання

Обчислимо середню ціну за 1 кг: $\bar{x} = \frac{150+300}{\frac{150}{3}+\frac{300}{2}} = 2{,}25$ (грн).

Задача 9. У табл. 2 подано відомості про вартість трьох видів товару (X, Y, Z) та їхню ціну. Визначте середню ціну реалізованого товару.

Таблиця 2

Товар	*X*	*Y*	*Z*
Ціна за 1 кг товару (грн)	3	5	4,5
Вартість реалізованого товару (грн)	999	1000	1125

Розв'язання

Визначимо середню ціну товару:

$$\bar{x}_{\text{сер. гарм}} = \frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{\frac{m_1}{x_1}+\frac{m_2}{x_2}+\ldots+\frac{m_n}{x_n}} = \frac{999+1000+1125}{\frac{999}{3}+\frac{1000}{5}+\frac{1125}{4.5}} = 3{,}99 \text{ (грн)}.$$

Задача 10. Внаслідок інфляції споживчі ціни за 3 роки зросли в 2,7 разу, причому за перший рік ціни зросли у 1,8 разу, за другий рік — в 1,2 разу, а за третій рік — в 1,25 разу. Визначте середньорічний темп зростання цін.

Розв'язання

Визначальна властивість $\prod_{1}^{n} x_j = 2{,}7$ забезпечується середньою геометричною: $\bar{x}_{\text{сер. геом}} = \sqrt[3]{1{,}8\cdot 1{,}2\cdot 1{,}25} = \sqrt[3]{2{,}7} = 1{,}394$.

Отже, ціни за рік в середньому зростають у 1,394 разу.

Заняття 19

Тема: ***Застосування елементів теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту***

Мета: ознайомити учнів із прикладами застосування елементів теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту.

Тип заняття: формування вмінь і навичок.

Базові поняття: елементи комбінаторики, теорія ймовірностей, розміщення, комбінація, перестановки, класичне означення ймовірності та формула обчислення (з курсу алгебри та початків аналізу 11 класу), математичне сподівання, середні величини.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Розглянемо застосування саме елементів теорії імовірностей, оскільки вона обґрунтовує економічні обчислення, пов'язані з явищами випадкового характеру.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Статистичні дані свідчать про те, що при вкладанні капіталу у виробництво певної продукції у розмірі 100 тис. грн прибуток отримали 25 разів зі 100 можливих. Знайдіть імовірність отримання прибутку.

Розв'язання

Нехай подія A — отримання прибутку. Обчислимо ймовірність P події A: $P(A)=\frac{25}{100}=0,25$.

Отже, ймовірність отримання прибутку становить 25 %.

Задача 2. Прийміть рішення щодо інвестування грошей в один з двох проектів (A і B), якщо для проекту A можливий прибуток становить 50 тис. гр. од. з імовірністю 40 %, а для проекту B можливий прибуток становить 80 тис. гр. од. з імовірністю 20 %. Спробуйте дати відповідь, спираючись на свою інтуїцію.

Розв'язання

Знайдемо очікуваний прибуток (математичне сподівання) для проекту A: $50\cdot 0,4=20$ (тис. гр. од.). Обчислимо очікуваний прибуток для проекту B: $80\cdot 0,2=16$ (тис. гр. од.).

Оскільки очікуваний прибуток для проекту A більший, ніж для проекту B, то гроші доцільно інвестувати у проект A.

Задача 3. Маємо капітал у розмірі 100 тис. грн і розглядаємо альтернативні можливості вкладу його у виробництво або у торгівлю. Використовуючи таблицю, зробіть висновок щодо вигідності вкладу грошей.

Ймовірність успіху вкладу капіталу	у виробництво	0,2
	у торгівлю	0,7
Ймовірність неуспіху вкладу капіталу	у виробництво	0,8
	у торгівлю	0,3
У разі успіху відсоток прибутку	від виробництва	90
	від торгівлі	30
У разі неуспіху відсоток прибутку	від виробництва	10
	від торгівлі	20

Розв'язання

Середньоочікуваний прибуток при вкладанні грошей у виробництво становитиме: $90\cdot 0,2+10\cdot 0,8=26\ \%$.

Середньоочікуваний прибуток при вкладанні капіталу в торгівлю становитиме: $30\cdot 0,7+20\cdot 0,3=27\ \%$.

Отже, вигідніше вкладати капітал у торгівлю.

Задача 4. При вкладанні грошей в об'єкт A прибуток у розмірі 15 тис. гр. од. мав місце в 40 випадках; прибуток у розмірі 20 тис. гр. од. — в 25 випадках; прибуток у розмірі 25 тис. гр. од. — в 15 випадках; при вкладанні грошей в об'єкт B прибуток у розмірі 10 тис. гр. од. мав місце в 50 випадках; прибуток у розмірі 12 тис. гр. од. — в 48 випадках; прибуток у розмірі 24 тис. гр. од. — в 36 випадках. Оберіть один з двох об'єктів (A або B) для інвестування грошей, щоб забезпечити найбільший прибуток.

Розв'язання

Середньоочікуване значення (математичне сподівання) прибутку (X) розраховується як сума математичних сподівань прибутку. При вкладанні капіталу в об'єкт A загальна кількість випадків дорівнює: $40+25+15=80$. У такому разі прибуток становить: $X=15\cdot\frac{40}{80}+20\cdot\frac{25}{80}+25\cdot\frac{15}{80}=18,44$ (тис. гр. од.). При вкладанні капіталу в об'єкт B загальна кількість випадків дорівнює: $50+48+36=134$. Тоді прибуток становить: $X=10\cdot\frac{50}{134}+12\cdot\frac{48}{134}+24\cdot\frac{36}{134}=14,48$ (тис. гр. од.).

Отже, об'єкт A є більш прибутковим.

Задача 5. Перший проект передбачає отримання протягом року прибутку у розмірі 15 тис. гр. од. з імовірністю 0,4, але не виключає збитку у розмірі 2 тис. гр. од. Другий проект обіцяє прибуток 10 тис. гр. од. з імовірністю 0,5 і можливим збитком 8 тис. гр. од. Визначте, який проект кращий з точки зору: 1) очікуваного прибутку; 2) меншої різниці ймовірностей прибутку та збитків (більш «обережний»); 3) співвідношення змін імовірностей прибутку та його величини; 4) співвідношення змін імовірностей збитків і їх величин; 5) співвідношення можливих сум прибутків і збитків.

Розв'язання

1) Середньоочікуваний прибуток (математичне сподівання) для першого проекту дорівнює: $0,4\cdot 15+0,6\cdot(-2)=4,8$ (тис. гр. од.). Середньоочікуваний прибуток для другого проекту становить: $0,5\cdot 10+0,5\cdot(-8)=1$ (тис. гр. од.).

Отже, з точки зору очікуваного прибутку значно вигіднішим (майже в 5 разів) є перший проект.

2) Для першого проекту різниця ймовірностей прибутку та збитків складає: $\frac{0,6-0,4}{0,4}=0,5$, або 50 %. Для другого проекту ця різниця дорівнює: $\frac{0,5-0,5}{0,5}=0$.

Отже, другий проект є більш обережним.

3) Порівняно з першим проектом у другому ймовірність отримання прибутку зростає на $\frac{0,5-0,4}{0,4}=0,25$, або 25 %, в той час як величина прибутку падає на $\frac{15-10}{15}=0,33$, або 33 %.

Оскільки імовірність прибутку в другому проекті порівняно з першим зростає значно менше, ніж падає його величина, то вигіднішим є перший проект.

4) Порівняно з першим проектом у другого ймовірність отримання збитків падає на $\frac{0,5-0,4}{0,4}=0,25$, або 25 %, в той час як величина збитків зростає на $\frac{8-2}{2}=3$, або 300 %.

Оскільки ймовірність збитків у другому проекті порівняно з першим зменшується набагато повільніше, ніж зростає їх величина, значно вигіднішим є перший проект.

5) Для першого проекту співвідношення можливих прибутків і збитків складає $\frac{15}{2}$, тобто на 1 тис. гр. од. можливих збитків припадає 7,5 тис. гр. од. можливого прибутку. Для другого проекту це співвідношення складає $\frac{10}{8}$, тобто на 1 тис. гр. од. можливих збитків припадає 1,25 тис. гр. од. можливого прибутку.

Отже, виходячи зі співвідношення можливих сум прибутків і збитків, вигіднішим є перший проект.

Контрольні запитання до теми 3

1. Що таке математичне сподівання та дисперсія? Запишіть їх рівняння.
2. Що в економічних дослідженнях приймають за міру ризику? Чому?
3. Які ще можливі шляхи застосування початків теорії імовірностей до розв'язування задач економічного змісту ви знаєте? Наведіть приклади.

ТЕМА 4. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Заняття 20–21

Тема. ***Застосування невизначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту***

Мета: ознайомити учнів із можливим застосуванням невизначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту; формувати вміння розв'язувати задачі економічного змісту за допомогою невизначеного інтеграла.

Тип заняття: застосування вмінь і навичок.

Базові поняття: невизначений інтеграл, сукупні витрати, сукупний дохід, граничні витрати, граничний дохід.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 1. Функція граничного доходу фірми описується рівнянням $MR=100-2x$, де x — кількість виробленої продукції. Запишіть функцію сукупного доходу, якщо відомо, що при нульовому випуску продукції фірма отримає нульовий сукупний дохід.

Розв'язання

Функцію сукупного доходу можна знайти шляхом інтегрування функції граничного доходу: $TR=\int MRdx=\int(100-2x)dx=$ $=100x-x^2+C$, де C — константа інтегрування. За умовою задачі при нульовому випуску продукції фірма отримає нульовий сукупний дохід. Тоді $TR(0)=0=100\cdot0-0^2+C$; $C=0$.

Отже, рівняння функції сукупного доходу має вигляд: $TR=100x-x^2$.

Оскільки в економіці при нульовому випуску продукції фірма отримає нульовий сукупний дохід, то при знаходженні TR шляхом інтегрування приймається, що $C=0$.

Задача 2. Функцію граничних витрат фірми задано рівнянням $MC=3Q^2-4Q-5$, де Q — обсяг випуску продукції. 1) Запишіть функцію сукупних витрат, якщо мінімальні середні сукупні витрати досягаються за умови випуску 10 од. продукції. 2) Визначте рівноважний обсяг виробництва, якщо граничний дохід дорівнює 45,75 грн. 3) Знайдіть функцію сукупного доходу.

Розв'язання

1) Пригадаємо означення граничних витрат (MC) — це приріст витрат, пов'язаний із випуском додаткової одиниці продукції. Граничні витрати дорівнюють: $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$, де ΔTC — зміна загальних витрат, ΔQ — зміна кількості продукції, що виробляється, тобто $MC = TC'$, тоді $TC = \int MCdQ = \int\left(3Q^2 - 4Q - 5\right)dQ = Q^3 - 2Q^2 - 5Q + C$, де C — константа інтегрування. Знайдемо цю константу. За умовою задачі мінімальні середні сукупні витрати досягаються за умови випуску 10 од. продукції: $ATC = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 2Q - 5 + \frac{C}{Q}$. Знайдемо мінімальне значення ATC. Для цього потрібно знайти похідну ATC і прирівняти її до нуля: $ATC'(Q) = 0$. Тоді $2Q - 2 - \frac{C}{Q^2} = 0$, звідси $C = 1800$.

Функція сукупних витрат має вигляд: $TC = Q^3 - 2Q^2 - 5Q + 1800$.

2) Щоб визначити рівноважний обсяг виробництва, треба розв'язати рівняння: $MR = MC$; $3Q^2 - 4Q - 5 = 45{,}75$. Звідси $Q = 25$ (од.).

3) Знайдемо функцію сукупного доходу (TR). За умовою задачі граничний дохід дорівнює 45,75 грн, тоді: $TR = \int MRdQ = \int 45{,}75dQ = 45{,}75Q$.

Задача 3. Функція граничних витрат на продукцію описується рівнянням $MC = 4x + 20$, де x — кількість виробленої продукції. Сукупні витрати за умови виробництва 100 од. продукції становлять 2000 грн. Визначте функцію сукупних витрат.

Розв'язання

Знайдемо функцію сукупних витрат:

$TC = \int MCdx = \int(4x + 20)dx = 2x^2 + 20x + C$.

За умовою задачі сукупні витрати за умови виробництва 100 од. продукції становлять 2000 грн, тоді: $TC(100) = 2000$; $2 \cdot 100^2 + 20 \cdot 100 + C = 2000$; $C = -20000$.

Отже, функція сукупних витрат має вигляд: $TC = 2x^2 + 20x - 20000$.

Задача 4. Функція граничних витрат фірми описується рівнянням $MC = 3 + 2Q$, де Q — обсяг випуску продукції. Постійні витрати фірми дорівнюють 9 у. о. Визначте сукупні витрати фірми, якщо обсяг виробництва становить 5 од.

Розв'язання

Відомо, що $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = TC'(Q)$; $TC = FC + VC$; FC — const. Отже, сукупні витрати змінюються в результаті приросту змінних витрат. Тому граничні витрати можна визначити також за показником приросту змінних витрат. Тобто: $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{\Delta VC}{\Delta Q} = TC'(Q) = VC'(Q)$. Тоді: $VC = \int MCdQ = \int(3 + 2Q)dQ = 3Q + Q^2$. За умовою задачі $FC = 9$. Отже, функцію сукупних витрат можна записати таким чином: $TC = VC + FC = 3Q + Q^2 + 9$. Визначимо сукупні витрати фірми за умови обсягу виробництва 5 од.: $TC(5) = 3 \cdot 5 + 5^2 + 9 = 49$ (у. о.).

Заняття 22–24

Тема. ***Застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту***

Мета: ознайомити учнів із застосуванням визначеного інтеграла в задачах економічного змісту; формувати вміння застосовувати його до розв'язування задач.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: визначений інтеграл, геометричний зміст визначеного інтеграла, формула Ньютона — Лейбніца, основні властивості визначених інтегралів.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

З метою формування уявлень учнів про застосування визначеного інтеграла в економіці доцільно розв'язати подані задачі, у ході розв'язування яких необхідно актуалізувати знання учнів щодо застосування похідної в економіці.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Знайдемо обсяг продукції Q, який був вироблений за певний проміжок часу $[0; T]$.

Нехай $y = f(t)$ — функція, яка описує зміну продуктивності деякого виробництва зі зміною часу t.

Тоді із означення визначеного інтеграла випливає:

$$Q = \int_0^T f(t)\,dt,$$

де $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t; Q — обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$.

Розглянемо розподіл багатства у суспільстві.

Розподіл багатства у суспільстві можна відобразити за допомогою *кривої Лоренца* (рис. 1). Нехай функція $f(x)$ описує розподіл доходів в суспільстві ($0 < x < 1$; $0 < f(x) < 1$).

Точка B на кривій Лоренца m показує, що на $\frac{1}{4}$ частину населення припадає лише 0,1 частина всього доходу. Тобто чим крутіше вигнута крива Лоренца, тим сильніша нерівність розподілу доходів в суспільстві. Якщо б крива Лоренца співпала з прямою OA, то це означало би, що в суспільстві є абсолютна рівність розподілу доходів.

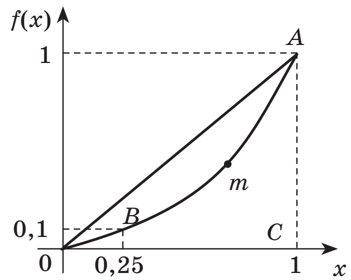


Рис. 1. Крива Лоренца

Економісти використовують не тільки графічне зображення нерівності доходів, але й кількісне вимірювання за допомогою *індексу Джині*.

Індекс Джині k_G являє собою відношення площі, обмеженої фактичною кривою Лоренца і кривою Лоренца для абсолютно рівномірного розподілу доходів (S_{OAmO}), до площі трикутника, обмеженого кривою Лоренца для абсолютного рівномірного розподілу та осями координат (S_{OAC}) : $k_G = \frac{S_{OAmO}}{S_{OAC}}$. $S_{OAmO} = \int_0^1 (x - f(x))\,dx$; $S_{OAC} = \frac{1}{2}$. Отже, $k_G = 2\int_0^1 (x - f(x))\,dx$.

Якщо $k_G = 0$, то це означає, що у суспільстві існує абсолютна рівність.

Якщо $k_G = 1$, то це означає, що в суспільстві всі доходи належать одній людині.

Ці дві ситуації ($k_G = 0$; $k_G = 1$) є абстрактними, тому індекс Джині завжди перебуває в інтервалі $0 < k_G < 1$.

Якщо $0 < k_G \leqslant 0{,}3$, то спостерігається незначна нерівність розподілу доходів.

Якщо $0{,}3 < k_G \leqslant 0{,}7$, то спостерігається значна нерівність розподілу доходів.

Якщо $0{,}7 < k_G < 1$, то спостерігається дуже значна нерівність розподілу доходів.

За підрахунками економістів у розвинених країнах індекс Джині перебуває в інтервалі $0{,}2 < k_G \leqslant 0{,}3$; у країнах з перехідною економікою — в інтервалі $0{,}3 < k_G \leqslant 0{,}7$; у слаборозвинених країнах — в інтервалі $0{,}7 < k_G \leqslant 0{,}9$.

Запропоновані приклади з теорії не вичерпують всіх можливостей застосування визначеного інтегралу в економіці.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Граничний дохід від реалізації продукції дорівнює 15 грн. Визначте графічно та аналітично дохід від продажу 1000 од. продукції.

Розв'язання

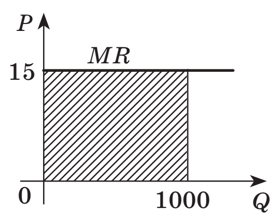


Рис. 2

Відомо, що $MR = TR'(Q)$, де Q — кількість проданої продукції. За умовою задачі $MR = 15$ грн.

Тоді $TR = \int_0^{1000} 15\,dQ = 15Q\Big|_0^{1000} =$

$= 15\,000$ (грн).

Побудуємо графік (рис. 2).

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Функція сукупного доходу фірми описується рівнянням $TR = -t^2 + 225$, де t — кількість днів; TR — сукупний дохід за день. Сукупні витрати дорівнюють 104 грн щодня. Фірма хоче максимізувати свій дохід. Визначте, скільки часу фірма працюватиме, маючи дохід; скільки при цьому складе її загальний дохід.

Розв'язання

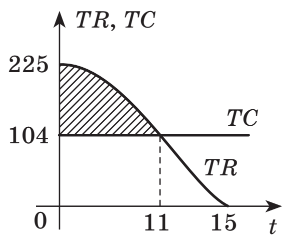


Рис. 3

Побудуємо графік (рис. 3).

За умовою задачі $TC=104$.

Фірма матиме дохід, якщо загальний дохід перевищуватиме загальні витрати. Тоді в точці, де $TR=TC$, фірма не матиме ані доходу, ані збитків ($t=11$ днів). Тобто фірма працюватиме 11 днів, маючи при цьому дохід.

Загальний дохід фірми протягом 11 днів (площа заштрихованої фігури на рис. 3) при цьому становитиме: $TR=$

$$=\int_0^{15}\left(-t^2+225\right)dt-104\cdot 11-0{,}5\cdot 104\cdot(15-11)=\left(225t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{15}-1144-$$

$-208=898$ (грн).

Задача 3. Функція обсягу продукції описується рівнянням $f(t)=(1+t)e^{2t}$. Знайдіть обсяг продукції, виробленої за 2 роки.

Розв'язання

Обсяг Q виробленої продукції дорівнює:

$$Q=\int_0^2(1+t)e^{2t}dt=\left|\begin{array}{l}u=1+t\\ dv=e^{2t}dt\\ du=dt\\ v=\dfrac{1}{2}e^{2t}\end{array}\right|=\frac{1}{2}(1+t)e^{2t}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2t}dlt\,\frac{1}{2}\left(3e^4-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^2\approx 66 \text{ (од.)}.$$

Отже, обсяг виробленої продукції за даних умов дорівнює приблизно 66 од. продукції.

Задача 4. Функцію продуктивності праці задано рівнянням $f(t)=3t^2-2t+5$. Визначте обсяг виробленої продукції за перші 5 годин роботи підприємства.

Розв'язання

Визначимо обсяг виробленої продукції:

$$Q=\int_0^5\left(3t^2-2t+5\right)dt=t^3-t^2+5t\Big|_0^5=125 \text{ (од.)}.$$

Тобто протягом перших 5 годин роботи за даних умов підприємство виробить 125 од. продукції.

Задача 5. У прямокутник Q зі сторонами 6 і 15, які паралельні осям координат x і y відповідно, впишіть лекало L, конфігурація якого визначається системою рівнянь

$$L:\begin{cases}x=0,\\ y=4x+7,\\ x+2y-32=0,\\ y=(x-7)^2+5,\\ y=6x-30,\\ y=0.\end{cases}$$

Визначте площу лекала. Виведіть формулу для підрахунку кількості H пряжі, необхідної для плетіння деталей трикотажного виробу за даним лекалом L, вважаючи, що витрати пряжі дорівнюють x г на квадратну одиницю площі. Знайдіть відсоток відходів при розкроюванні за даним лекалом L зі шматка тканини, який має форму прямокутника Q.

Розв'язання

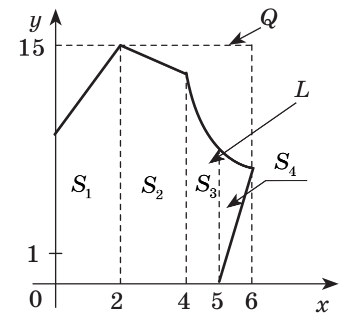


Рис. 4

Побудуємо рис. 4, на якому зобразимо лекало L і прямокутник Q, площа якого становить 6×15.

Знайдемо площу лекала L.

Поділимо шукану площу лекала L, яку позначимо через S, на 4 частини, відділяючи їх одну від одної пунктирними лініями, і позначимо площу кожної з них відповідно через S_1, S_2, S_3, S_4. Тоді знайдемо S як суму площ частин розбиття: $S=S_1+S_2+S_3+S_4$.

Знайдемо площу кожної частини, пам'ятаючи, що необхідно подати функцію y у вигляді $y=f(x)$.

Тоді $S_1=\int_0^2(4x+7)dx$; $S_2=\int_2^4\left(16-\frac{x}{2}\right)dx$; $S_3=\int_4^5\left((4-7)^2+5\right)dx$;

$$S_4=\int_5^6\left((x-7)^2+5-(6x-30)\right)dx.$$

Таким чином, обчислимо площу всього лекала:

$$S=\int_0^2(4x+7)dx+\int_2^4\left(16-\frac{x}{2}\right)dx+\int_4^5\left((x-7)^2+5\right)dx+\int_5^6\left((x-7)^2+5-\right.$$

$$\left.-(6x-30)\right)dx.$$

Зробивши всі розрахунки, одержимо: $S=66\frac{2}{3}$ (квадратних одиниць).

Якщо ми знаємо площу лекала, то можна знайти, скільки грамів пряжі необхідно для виготовлення однієї деталі: $H=66\frac{2}{3}x$.

Отже, на виготовлення деталі за даним лекалом необхідно $66\frac{2}{3}x$ г пряжі.

Площа прямокутника Q, розміри якого 6×15, дорівнює 90 кв. од., а площа лекала L — $66\frac{2}{3}$ кв. од., тобто площа відходів становить $23\frac{1}{3}$ кв. од. Таким чином, відсоток відходів тканини складає: $\frac{23\frac{1}{3}}{90}\cdot 100\,\%\approx 25{,}92\,\%\approx 26\,\%$.

Задача 6. Для країни X крива Лоренца описується рівнянням $y=0{,}3x^2+0{,}2x$. Визначте, яку частину сукупного доходу отримує 10 % населення з найменшим доходом. Знайдіть коефіцієнт розподілу суспільного доходу (індекс Джині).

Розв'язання

Щоб визначити, якою частиною сукупних доходів володіє 10 % населення з найменшим доходом, треба у рівняння кривої Лоренца підставити $x=0{,}1$: $y(0{,}1)=0{,}3\cdot 0{,}1^2+0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}023$. Тобто 10 % населення з найменшим доходом отримує 2,3 % сукупного доходу країни.

Обчислимо індекс Джині: $k_G=2\int\limits_0^1\left(x-f(x)\right)dx=$

$$=2\int\limits_0^1\left(x-0{,}3x^2-0{,}2x\right)dx=2\int\limits_0^1\left(0{,}8x-0{,}3x^2\right)dx=2\left(0{,}4x^2-0{,}1x^3\right)\Big|_0^1=$$

$$=0{,}8-0{,}2=0{,}6.$$

Отже, у країні X має місце значна нерівність розподілу доходів, тобто це країна з перехідною економікою.

Задача 7. Для країни Y крива Лоренца описується рівнянням $y=x^2+0{,}02x$. Визначте, яку частину сукупного доходу отримує 25 % населення з найменшим доходом. Знайдіть коефіцієнт розподілу суспільного доходу.

Розв'язання

Щоб визначити, якою частиною сукупних доходів володіє 25 % населення з найменшим доходом, треба у рівняння кривої Лоренца підставити $x=0{,}1$: $y(0{,}1)=0{,}25^2+0{,}02\cdot 0{,}25=0{,}0675$. Тобто 25 % населення з найменшим доходом отримує 6,75 % сукупного доходу країни.

Обчислимо індекс Джині: $k_G=2\int\limits_0^1\left(x-f(x)\right)dx=$

$$=2\int\limits_0^1\left(x-x^2-0{,}02x\right)dx=2\int\limits_0^1\left(0{,}98x-x^2\right)dx=2\left(0{,}49x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1\approx 0{,}38.$$

Отже, у країні Y має місце значна нерівність розподілу доходів, тобто це країна з перехідною економікою.

Заняття 25–27

Тема. ***Вигоди споживача та виробника***

Мета: ознайомити учнів з оцінкою вигоди споживача і виробника; формувати вміння її обчислювати.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: попит, пропозиція, вигода.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Вигода споживача (CS) — це різниця між гіпотетичними витратами споживача, які могли би бути, і реальними витратами в умовах ринку $\left(P_0\cdot Q_0\right)$.

Графічно вигоду споживача подано на рис. 1.

Аналітично вигода споживача визначається за формулою:

$$CS=\int\limits_0^{Q_0}f(Q)dQ-P_0\cdot Q_0.$$

Графічно вигоду виробника (PS) подано на рис. 2.

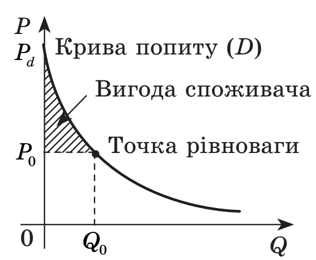


Рис. 1

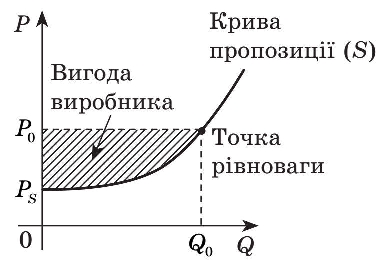


Рис. 2

Аналітично вигода виробника визначається за формулою:

$$PS = P_0 \cdot Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q_S)\,dQ.$$

Розмістимо графіки попиту та пропозиції в одній системі координат (рис. 3).

Нехай попит є еластичним. Держава вводить податок у розмірі t з кожної одиниці продажу. Розглянемо розподіл податків між споживачем та виробником на графіку (рис. 4).

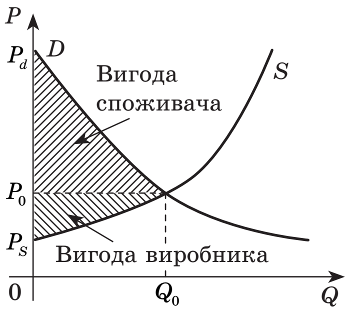


Рис. 3

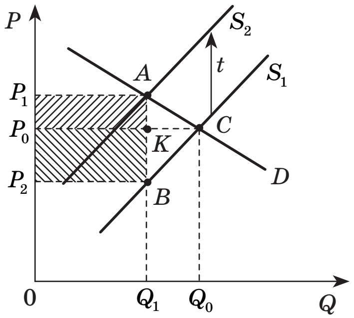


Рис. 4

Унаслідок введення податку крива пропозиції зсувається вліво (ціна рівноваги P_0 збільшується до P_1, рівноважний обсяг Q_0 зменшується до Q_1).

Площа фігури P_1ABP_2 відповідає сумі податкових надходжень до бюджету від всього обсягу продажу Q_1. Такі надходження розподіляються на дві частини. Перша частина податків виплачується споживачами і відповідає площі фігури P_1AKP_0. Друга частина виплачується виробниками і відповідає площі фігури P_0KBP_2.

Трикутник ABC показує суму втрачених виграшів споживача та виробника — економіка зазнає чистих втрат. Цей трикутник називають *трикутником Харберга*. Площу даного трикутника можна знайти таким чином:

$$S_{\triangle ABC} = \int_{Q_1}^{Q_0} \left(f(Q_D)\right) dQ - \int_{Q_1}^{Q_0} f(Q_{S_1})\,dQ.$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Функцію попиту задано рівнянням $P = f(Q) = 25 - 2Q^2$. Рівноважний обсяг продажу дорівнює 2. Знайдіть вигоду споживача.

Розв'язання

Знайдемо рівноважну ціну: $P_0 = f(Q_0) = 25 - 2 \cdot 2^2 = 17$.

Тоді вигода споживача становитиме: $CS = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - P_0 \cdot Q_0 =$

$$= \int_0^3 \left(25 - 2Q^3\right) dQ - 17 \cdot 2 = \left(25Q - \frac{2}{3}Q^3\right)\Big|_0^2 - 34 \approx 13{,}4 \text{ (гр. од.)}.$$

Задача 2. Функцію пропозиції задано рівнянням $P = f(Q) = 5 + 4 \cdot Q^3$, рівноважний обсяг продажу дорівнює 3. Знайдіть вигоду виробника.

Розв'язання

Знайдемо рівноважну ціну: $P_0 = f(Q_0) = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$.

Тоді вигода виробника дорівнюватиме: $PS = P_0 \cdot Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ =$

$$113 \cdot 3 - \int_0^3 \left(5 + 4 \cdot Q^3\right) dQ = 339 - \left(5Q + Q^4\right)\Big|_0^3 = 243 \text{ (гр. од.)}.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 3. Функції попиту та пропозиції описуються рівняннями $Q_D = 30 - P$, $Q_S = -15 + 2P$, де P — ціна одиниці продукції (грн); Q_D — величина попиту на товар; Q_S — величина пропозиції на товар. Визначте вигоду споживача та виробника.

Розв'язання

Спочатку визначимо рівноважну ціну (P) та обсяг продажу (Q): $30 - P = -15 + 2P$; $P = 15$; $Q = 15$.

Визначимо вигоду споживача: $CS = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - P_0Q_0 =$

$$= \int_0^{15} (30 - Q)\,dQ - 15 \cdot 15 = \left(30Q - \frac{Q^2}{2}\right)\Big|_0^{15} - 225 = 30 \cdot 15 - \frac{15^2}{2} - 225 =$$

$= 112{,}5$ (грн).

Визначимо вигоду виробника: $PS = P_0 \cdot Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ = 15 \cdot 15 -$

$$- \int_0^{15} (0{,}5Q + 7{,}5)\,dQ = 225 - \left(\frac{Q^2}{4} + 7{,}5Q\right)\Big|_0^{15} = 225 - \left(\frac{15^2}{4} + 7{,}5 \cdot 15\right) =$$

$= 56{,}25$ (грн).

Задача 4. Функція попиту на товар описується рівнянням $Q_D = 6 - P$, функція пропозиції – рівнянням $Q_S = -3 + 2P$, де P — ціна одиниці продукції (гр. од.); Q_D — величина попиту на товар; Q_S — величина пропозиції на товар (од.). Визначте вигоду споживача та виробника. Держава ввела податок у розмірі 1,5 гр. од. на одиницю товару. Визначте рівноважну ціну після встановлення податку. Визначте суму втраченого виграшу виробника та споживача. Подайте графічну інтерпретацію.

Розв'язання

Визначимо рівноважну ціну (P) та обсяг (Q) продажу: $6-P=-3+2P$; $P=3$; $Q=3$. Тоді виграш споживача становитиме:

$$CS=\int_0^{Q_0} f(Q)dQ-P_0Q_0=\int_0^3(6-Q)dQ-3\cdot 3=\left(6Q-\frac{Q^2}{2}\right)\Bigg|_0^3-9=4,5 \text{ (гр. од).}$$

Виграш виробника дорівнюватиме: $PS=P_0\cdot Q_0-\int_0^{Q_0} f(Q)dQ=3\cdot 3-$

$$-\int_0^3\left(\frac{1}{2}Q+1,5\right)dQ=9-\left(\frac{Q^2}{4}+1,5Q\right)\Bigg|_0^3=2,25 \text{ (гр. од).}$$

Після введення податку функція пропозиції набуде вигляду: $Q_{S1}=-3+2(P-1,5)$; $Q_{S1}=-6+2P$. Тоді параметри рівноваги після введення податку: $6-P=-6+2P$; $P=4$; $Q=2$. За таких умов сума втраченого виграшу виробника та споживача дорівнюватиме:

$$S_{ABC}=\int_{Q_1}^{Q_0} f(Q_D)dQ-\int_{Q_1}^{Q_0} f(Q_{S_1})dQ=\int_2^3(6-Q)dQ-$$

$$-\int_2^3(0,5Q+1,5)dQ=\left(6Q-\frac{Q^2}{2}\right)\Bigg|_2^3-\left(\frac{Q^2}{4}+1,5Q\right)\Bigg|_2^3=$$

$=0,75$ (гр. од.).

Побудуємо графічну інтерпретацію (рис. 5).

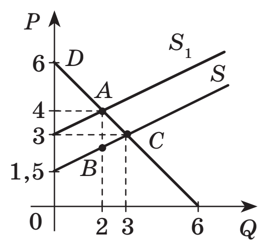


Рис. 5

Контрольні запитання до теми 4

1. Дайте означення невизначеного інтеграла.
2. Назвіть приклади застосування невизначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту.
3. Дайте означення визначеного інтеграла.
4. Наведіть приклади застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту.
5. Як визначається майбутня вартість неперервного доходного потоку?
6. Що таке вигода споживача та вигода виробника?
7. Як графічно та аналітично визначаються вигода споживача та вигода виробника?

ТЕМА 5. РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ В ЕКОНОМІЦІ

Заняття 28–29

Тема. ***Модель Леонтьєва (у дво- та тривимірному просторах)***

Мета: ознайомити учнів із основними припущеннями моделі Леонтьєва; формувати вміння застосовувати отримані знання до розв'язування задач.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: формули Крамера, метод Гауса.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Функціонування господарства вимагає балансу між окремими галузями. Кожна галузь, з одного боку, є виробником, а з іншого — споживачем продукції, яку виготовляють інші галузі. Тому виникає проблема встановлення взаємозв'язку між галузями через випуск та споживання різних видів товару.

Вперше цю проблему у вигляді математичної моделі сформулював у 1936 р. американський економіст В. Леонтьєв.

Модель Леонтьєва дозволяє дослідити та обчислити, яким має бути загальний рівень виробництва в економіці, якщо відомі обсяг виробництва для споживання всередині галузі та обсяг виробництва, призначений для споживання галузями, які даній галузі не належать.

Основні припущення моделі Леонтьєва:

1) в економічній системі виробляється, купується, споживається та інвестується n видів товару, які позначають індексами 1, 2, 3, …, n;
2) кожна галузь виробляє лише один вид товару. Отже, спільне виробництво товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, і тому галузь, що виготовляє, наприклад, товар виду i, позначають індексом i;
3) під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких (можливо, всіх) видів продукції, взятих у певних кількостях, на деяку кількість продукції одного чи іншого видів. При цьому допускається, що співвідношення витраченої і випущеної продукцій є постійним.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Нехай економіка деякої країни складається з двох галузей (сільське господарство та переробна промисловість). Кожна галузь виробляє 2 види продуктів (пшеницю та тканину): частину свого річного випуску споживає сама, частину спрямовує в іншу галузь, а решту — кінцевим споживачам. Відповідні зв'язки подано в табл. 1 (у натур. од.). Знайдіть витрати даних галузей.

Таблиця 1

У галузь / Із галузі	**Сільське господарство**	**Переробна промисловість**	**Кінцевий продукт (домашні господарства)**	**Валовий продукт (загальна кількість продукції)**
Сільське господарство	25	20	55	100
Переробна промисловість	14	6	30	50
Усього	100	50		

Розв'язання

За даними табл. 1 знайдемо коефіцієнти витрат двох галузей (табл. 2).

Таблиця 2

У галузь / Із галузі	**Сільське господарство**	**Переробна промисловість**
Сільське господарство	$\frac{25}{100}=0,25$	$\frac{20}{50}=0,4$
Переробна промисловість	$\frac{14}{100}=0,14$	$\frac{6}{50}=0,12$

Отже, сільському господарству необхідно 0,25 од. власної продукції і 0,14 од. продукції переробної промисловості. Переробній промисловості необхідно 0,4 од. продукції сільського господарства і 0,12 од. власної продукції.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Економіка деякої країни базується на двох галузях. Кожна галузь споживає частину свого річного випуску сама, частину спрямовує в другу галузь, а решту — до інших галузей. Зв'язок між двома основними галузями можна описати таким чином: для виробництва 1 од. продукції 1-ї галузі необхідно 0 од. власної продукції і 0,5 од. продукції 2-ї галузі; для виробництва 1 од. 2-ї галузі необхідно 0,25 од. продукції 1-ї галузі та 0 од. власної продукції. В інші галузі спрямовується 120 од. продукції 1-ї галузі та 320,875 од. продукції 2-ї галузі. Визначте загальну кількість продукції для кожної галузі даної економіки.

Розв'язання

Нехай x — загальна кількість продукції 1-ї галузі, y — загальна кількість продукції 2-ї галузі. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0,5y + 120, \\ y = 0,25x + 320,875. \end{cases}$$

Звідси $x = 320,5$ (од. продукції), $y = 401$ (од. продукції).

Розглянемо приклад застосування моделі Леонтьєва для тривимірного простору.

Задача 3. Економіка деякої країни базується на трьох галузях: сільське господарство, переробна промисловість, важка промисловість. Кожна галузь споживає частину свого річного випуску сама, частину спрямовує в іншу галузь, а решту — кінцевим споживачам. Зв'язки між галузями подано у табл. 3 (у натур. од.). Визначте загальну кількість продукції кожної галузі даної економіки.

Таблиця 3

У галузь / Із галузі	**Сільське господарство**	**Переробна промисловість**	**Важка промисловість**
Сільське господарство	0,4	0,2	0,3
Переробна промисловість	0,15	0,25	0,1
Важка промисловість	0,1	0,15	0,2
Кінцевий споживач	60	30	20

Розв'язання

Нехай x — загальна кількість продукції сільського господарства, y — загальна кількість продукції переробної промисловості, z — загальна кількість продукції важкої промисловості. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0,4x + 0,2y + 0,3z + 60, \\ y = 0,15x + 0,25y + 0,1z + 30, \\ z = 0,1x + 0,15y + 0,2z + 20. \end{cases}$$

Звідси $x = 160$, $y = 80$, $z = 60$.

Заняття 30–31

Тема. ***Періодичні платежі (ануїтет)***

Мета: ознайомити учнів із поняттям ануїтету, його поточною та майбутньою вартостями; формувати вміння визначати величину внеску та термін вкладу.

Тип заняття: комбінований.

Базові поняття: ануїтет, простий відсоток, складний відсоток, конверсійний період (з курсу 10 класу).

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

У багатьох випадках борг або кредит повертаються як серія рівних виплат, зроблених через рівні проміжки часу, — це і є ануїтет.

Ануїтет (фінансова рента) — це послідовність зазвичай однакових внесків, зроблених через рівні проміжки часу.

Кожен внесок називають періодичним внеском і позначають символом R. Час, протягом якого здійснюються періодичні внески, називають *терміном ануїтету*.

Якщо кожний внесок здійснюється в кінці періоду сплати, то такий ануїтет називають *звичайним ануїтетом*. Якщо кожна виплата здійснюється на початку періоду сплати, то такий ануїтет називають *ануїтетним зобов'язанням*.

Кінцева вартість звичайного ануїтету розраховується за формулою:

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{i},*$$

де n — кількість конверсійних періодів; i — відсоткова ставка за конверсійний період.

Поточна вартість звичайного ануїтету визначається за формулою:

$$A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.*$$

* Значення величин $\frac{(1+i)^n-1}{i}$, $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ можна знайти у таблицях, які подано в кінці посібників з фінансової математики.

Кінцева вартість ануїтетного зобов'язання розраховується за формулою:

$$S=R\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right).*$$

Поточна вартість ануїтетного зобов'язання визначається за формулою:

$$A=R\left(1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right).*$$

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Підприємець взяв позику в банку у розмірі 10 000 грн із відсотковою ставкою 12 %. Він планує її повертати протягом 2 років, сплачуючи по 1500 грн щоквартально. Обчисліть прибуток банку.

Розв'язання

Якщо в умові задачі не сказано, коли буде здійснюватися внесок, то припускають, що внесок відбувається в кінці періоду сплати (тобто треба розглядати звичайний ануїтет):

$$S=R\frac{(1+i)^k-1}{i}=1500\cdot\frac{\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4\cdot2}-1}{0,03}=1500\cdot8,892\,336\approx$$

$\approx 13\,338,5$ (грн).

Отже, протягом двох років підприємець сплатить 13 338,5 грн. Тобто він переплатить 3338,5 грн (3338,5 грн — прибуток банку).

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Підприємець вносить по 800 грн щоквартально на ощадний рахунок у банку. Він планує це робити протягом 3 років на початку кожного кварталу. При цьому прибуток підприємця становить 12 %. Визначте, яку суму підприємець отримає через 3 роки.

Розв'язання

Обчислимо кінцеву вартість ануїтетного зобов'язання:

$$S=R\left(\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right)=800\left(\frac{(1+0,03)^{12+1}-1}{0,03}\right)=800\cdot15,61\,779\approx$$

$\approx 12\,494,23$ (грн).

* Значення величин $\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$, $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ можна знайти у таблицях, які подано в кінці посібників з фінансової математики.

Отже, через 3 роки підприємець матиме на ощадному рахунку 12 494,23 грн.

Задача 3. Фірма *A* вносить по 1300 грн щомісяця на ощадний рахунок при 16 % річних. Угодою передбачено, що фірма повинна здійснювати свої внески в кінці кожного місяця протягом 2 років. Фірма *B* вносить гроші на тих самих умовах, що і фірма *A*, однак внески здійснює на початку місяця. Визначте, чия угода вигідніша.

Розв'язання

Обчислимо кінцеву вартість для фірми *A* за формулою звичайного ануїтету: $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = 1300 \cdot \dfrac{\left(1+\dfrac{0,16}{4}\right)^{12\cdot 2} - 1}{0,04} = 1300\times$ $\times 39,082\,604 \approx 50\,807,39$ (грн).

Обчислимо кінцеву вартість для фірми *B* за формулою ануїтетного зобов'язання: $S = R\left(\dfrac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right) = 1300\left(\dfrac{(1+0,04)^{24+1} - 1}{0,04}\right) =$ $= 1300 \cdot 41,645\,908 \approx 54\,139,68$ (грн).

Отже, вигідніше уклала угоду фірма *B*.

Заняття 32–33

Тема. ***Амортизація боргу***

Мета: ознайомити учнів із поняттям амортизації боргу; формувати вміння застосовувати одержані на попередніх уроках знання до аналізу амортизації боргу в найпростіших випадках.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

Базові поняття: амортизація, різницеві рівняння, ануїтет.

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Амортизація — погашення боргу (основної суми та відсотків) шляхом послідовного внесення однакових платежів.

Оскільки платежі являють собою практично рівні величини, то вони утворюють ануїтет.

Розглянемо різницеві рівняння амортизації боргу.

У деяких задачах економічного змісту незалежна змінна t набуває дискретних значень, наприклад, за результатами виробництва на кінець року, місяця тощо.

Нехай y_t — значення функції $f(x)$ на момент часу t, y_{t+1} — значення функції $f(x)$ на момент часу $t+1$. Тоді $\Delta f(x) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ є різницею першого порядку, $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) =$ $= f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))$ $f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x)$ — різницею другого порядку і т. д.

Аналогічно можна розглянути різниці вищих порядків.

Різницевим рівнянням n-го порядку називають залежність $F(x, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y) = 0$.

Надалі розглядатимемо лише лінійні різницеві рівняння із постійними коефіцієнтами: $a_0 y_x + a_1 y_{x-1} + a_2 y_{x-2} + \dots + a_n y_{x-n} = f(x)$.

Перед розв'язуванням задач необхідно актуалізувати знання учнів про функцію, областю визначення якої є натуральні числа. Це вже відомі числові послідовності. Позначатимемо члени послідовності через y_0, y_1, y_2, …, y_n.

ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Задача 1. Вартість обладнання становить 5000 гр. од. Унаслідок експлуатації вартість обладнання зменшується щороку на 30 %. Визначте вартість цього обладнання через 3 роки; через n років.

Розв'язання

Нехай y_0 — вартість обладнання.

Тоді в кінці 1-го року ціна обладнання становитиме:
$y_1 = y_0 - 0,3y_0 = 5000 - 5000 \cdot 0,3 = 3500$ (гр. од.);
в кінці 2-го року: $y_2 = y_1 - 0,3y_1 = 3500 - 0,3 \cdot 3500 = 2450$ (гр. од.);
в кінці 3-го року: $y_3 = y_2 - 0,3y_2 = 2450 - 0,3 \cdot 2450 = 17\,015$ (гр. од.).
в кінці n-го року: $y_{n+1} = y_n - 0,3y_n$.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Фірма взяла кредит у розмірі 10 000 грн на 3 роки під 18 % річних. Кредит та відсотки за користування грошима фірма повинна сплачувати однаковими внесками в кінці кожних півроку. Визначте піврічний внесок на погашення кредиту та побудуйте графік амортизації боргу.

Розв'язання

Величина внеску обчислюється за формулою поточної вартості звичайного ануїтету: $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, де $i = \dfrac{r}{m}$; m — кількість нарахувань на рік; $\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 4{,}485\,919$.

Звідси піврічний внесок становитиме: $R = 2229{,}2$.

Визначимо загальну суму внесків на погашення кредиту: $6 \cdot R = 13\,375{,}2$. Тоді прибуток позикодавця становитиме: $13\,375{,}2 - 10\,000 = 3375{,}2$ (грн).

Графік амортизації боргу подано у табл. 1.

Розбіжність у 0,01 грн з'явилась через похибки округлення.

Таблиця 1

Номер внеску	Внесок (грн)	Призначення внеску (грн)		Баланс (грн)
		Частина внеску на сплату відсотків за користування грошима	Частина внеску на погашення боргу	
1	10 000	0	0	10 000
2	2229,2	$10\,000 \cdot 0{,}09 = 900$	$2229{,}2 - 900 = 1329{,}2$	$10\,000 - 1329{,}2 = 9670{,}8$
3	2229,2	$8670{,}8 \cdot 0{,}09 = 780{,}37$	$2229{,}2 - 780{,}37 = 1448{,}83$	7221,97
4	2229,2	649,98	1579,22	5642,75
5	2229,2	507,85	1721,35	3921,4
6	2229,2	352,93	1876,27	2045,13
7	2229,2	184,06	2045,14	–0,01

Задача 3. Борг 100 тис. грн необхідно амортизувати однаковими внесками в кінці кожного року протягом 5 років. Відомо, що відсоткова ставка дорівнює 5 %. Знайдіть величину внеску; складіть графік амортизації боргу.

Розв'язання

Визначимо величину внеску за формулою поточної вартості звичайного ануїтету:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},\ 100\,000 = R\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = R \cdot 4{,}329\,477.$$

Звідси $R = 23\,097{,}48$.

Побудуємо графік амортизації боргу (табл. 2).

Таблиця 2

Номер внеску	Внесок (грн)	Призначення внеску (грн)		Баланс (грн)
		Частина внеску на сплату відсотків за користування грошима	Частина внеску на погашення боргу	
1	100 000	0	0	100 000
2	23 097,48	$100\,000 \cdot 0{,}05 = 5000$	$23\,097{,}48 - 5000 = 18\,097{,}48$	$100\,000 - 18\,097{,}48 = 81\,902{,}52$
3	23 097,48	4095,13	19 002,48	62 900,17
4	23 097,48	3145,01	19 952,47	42 947,7
5	23 097,48	2147,38	20 950,1	21 997,6
6	23 097,48	1099,88	21 997,6	0

Заняття 34–35

Тема. ***Викупний фонд***

Мета: ознайомити учнів із поняттям викупного фонду; формувати вміння будувати графік викупного фонду.

Тип заняття: застосування знань і вмінь.

Базові поняття: прибуток споживача, нарахування грошей, ануїтет.

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Найпростішою формою викупного фонду є ощадний фонд, у якому платежі здійснюються систематично і однаковими внесками. Викупний фонд відрізняється від звичайного ощадного тим, що створюється для накопичення визначеної суми на визначену дату.

Задача 1. Підприємець планує через 2 роки купити нову холодильну камеру за 5000 грн. Відсоток за користування грошима банком становить 20 % зі щоквартальним нарахуванням. Визначте щоквартальний внесок підприємця та побудуйте графік амортизації боргу, якщо підприємець вносить гроші в кінці періоду сплати відсотків.

Розв'язання

Величину внеску визначають з формули для обчислення кінцевої суми звичайного ануїтету:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

де $i = \frac{r}{m}$, m — кількість нарахувань на рік. $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 9{,}5\,490\,918.$

Отже, щоквартальний внесок дорівнює: $R = 523{,}61$.

Загальна сума внесків на погашення боргу: $8 \cdot R = 4188{,}88$. Тоді прибуток позикодавця становитиме: $5000{,}00 - 4188{,}88 = 811{,}12$ (грн).

Графік викупного фонду подано у табл. 1.

Таблиця 1

Номер внеску	Внесок (грн)	Прибуток (грн)	Баланс (грн)
1	523,61	0	523,61
2	523,61	$523{,}61 \cdot 0{,}05 = 26{,}18$	$523{,}61 + 523{,}61 + 26{,}18 = 1073{,}4$
3	523,61	$1073{,}4 \cdot 0{,}05 = 53{,}67$	$1073{,}4 + 523{,}61 + 53{,}67 = 1650{,}68$
4	523,61	82,53	2256,82
5	523,61	112,84	2893,27
6	523,61	144,66	3561,54
7	523,61	178,08	4263,23
8	523,61	213,16	5000

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Задача 2. Через 5 років знадобиться сума в розмірі 500 тис. грн. Можна інвестувати гроші під 5 % річних. Щоб накопичити необхідну суму грошей, вклади треба здійснювати в кінці кожного року. Побудуйте графік викупного фонду.

Розв'язання

Спочатку знайдемо величину внеску. Для цього використаємо формулу для обчислення кінцевої суми звичайного ануїтету:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i};\ 500\,000 = R\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = R \cdot 5{,}525\,631;\ R = 90\,487{,}4.$$

Графік викупного фонду подано у табл. 2.

Таблиця 2

Номер внеску	Внесок (грн)	Прибуток (грн)	Баланс (грн)
1	90 487,4	0	90 487,4
2	90 487,4	$90\,487{,}4 \cdot 0{,}05 = 4524{,}37$	$90\,487{,}4 + 90\,487{,}4 + 4524{,}37 = 185\,499{,}17$
3	90 487,4	9274,96	285 261,53
4	90 487,4	14 263,08	390 012,01
5	90 487,4	19 500,6	500 000,01

Розбіжність у 0,01 грн з'явилась через похибки округлення.

Контрольні запитання до теми 5

1. Що можна дослідити за допомогою моделі Леонтьєва?
2. Назвіть основні припущення моделі Леонтьєва.
3. Наведіть приклади застосування моделі Леонтьєва у дво- та тривимірному просторах.
4. Що таке різницеві рівняння? Для чого їх використовують?
5. Дайте означення періодичного платежу. Наведіть приклади.
6. Наведіть приклади графіку амортизації боргу та графіку викупного фонду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абчук В. А. Экономико-математические методы: элементарная математика и логика. Методы исследования операций / Абчук В. А.— СПб.: Союз, 1999.— 318 с.
2. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.— Тернопіль: Навчальна книга— Богдан, 2004.— 456 с.
3. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.— Тернопіль: Навчальна книга.— Богдан, 2004.— 384 с.
4. Апанасов П. Т. Построение системы упражнений с экономическим содержанием в курсе математики средних учебных заведений: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук.— М., 1975.— 197 с.
5. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием.— М.: Просвещение, 1987.— 109 с.
6. Базілінська О. Я., Мініна О. В. Мікроекономіка: Навч. посіб. За ред. О. Я. Бізілінської.— Чернігів: ЧДТУ, 2004.— 186 с.
7. Базілінська О.Я. Макроекономіка: Навч. посіб. — К.: Центр навчальної літератури, 2005. — 442 с.
8. Бевз Г. П. Алгебра: Проб. підруч. для 7–9 кл. серед. шк.—2-ге вид.— К.: Освіта, 1997.— 303 с.
9. Бугір М. Математика для економістів.— Тернопіль: Підручник і посібники, 2001. — 192 с.
10. Вайнтрауб М. А. Похідна та її застосування / М. А. Вайнтрауб, О. С. Стрельченко // Математика в школі.— № 1.— 1999.— С. 38–41.
11. Вайнтрауб М. А., Стрельченко О. С., Стрельченко І. Г. Математика інвестицій: Навч. посіб.— К.: ТОВ «АРТ-ПРОГРАМИ», 2003. — 100 с.
12. Вайнтрауб М. А., Стрельченко О. С., Стрельченко І. Г. Фінансова математика: Навч. посіб. — К.: ТОВ «АРТ-ПРОГРАМИ», 2002. — 120 с.
13. Горбачевська О. В. Графічні побудови в мікроекономіці.— Львів: ЛБІ НБУ, 2002.— 175 с.
14. Горленко Г. О. Методичний посібник для вчителя до Збірника задач з економіки.— 2-е вид.— Кам'янець-Подільський: Абетка-НОВА, 2003.— 116 с.
15. Гронтковська Г. Е., Косік А. Ф. Мікроекономіка. Практикум: Навч. посіб.— К.: Центр навчальної літератури, 2004.— 404 с.
16. Гронтковська Г. Е., Косік А. Ф. Мікроекономіка: Навч. посіб.— К.: Центр навчальної літератури, 2004.— 416 с.
17. Дутка Г. Я. Вимоги до відбору задач з економічним змістом при вивченні математики // Математика в школі.— № 1.— 1999.— С. 31–34.
18. Дутка Г. Я. Практикум з математики для економістів.— Львів: Львівський банківський коледж, 1998.— 362 с.

19. Дутка Г. Я. Формування вмінь студентів розв'язувати прикладні задачі при навчанні математики в коледжах економічного профілю: Дис. канд. пед. наук.— К., 1998.— 187 с.
20. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб. / За ред. О. Т. Іващука. — Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. — 704 с.
21. Радіонова І. Ф. та ін. Загальна економіка: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / За ред. І. Ф. Радіонової.— 3-тє вид., доп. і перероб.— Кам'янець-Подільський: Абетка-НОВА, 2002.— 384 с.
22. Збірник задач з економіки: Навч. посіб. для учнів 10–11 кл. суспільно-гуманіатрного профілю / Упоряд. Г.О. Горленко.— 4-те вид.— Кам'янець-Подільський: Абетка-НОВА, 2006.—168 с.
23. Іванюта І. Д., Рибалка В. І., Рудоміно-Дусятська І. А. Елементи теорії ймовірностей та математична статистика.— К.: Слово, 2003.— 272 с.
24. Калініченко О. В., Березіна Л. М. Мікроекономіка. Практикум: Навч. посіб.— К.: Центр учбової літератури, 2008.— 432 с.
25. Ковальчук Г. О., Мельничук В. Г., Огнев'юк В. О. Економіка: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.— К.: Навчальна книга, 2003.— 352 с.
26. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов: Учеб. пособ.— М.: ИНФРА-М, 1999.— 208 с.
27. Латер Ю. С., Ящишина І. В. Методичний посібник до Робочого зошита із загальної економіки. Частина І, ІІ. — Кам'янець-Подільський: Абетка-НОВА, 2007. — 180 с.
28. Лях С. Економіка в задачах з математики.— К.: Шк. світ, 2007.— 128 с.
29. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навч. посіб.— К.: Знання, 2008. — 517 с.
30. Макконнелл К. Р., Брю С. Л. Экономикс: принципы, проблемы и политика: Пер. с 14-го англ. изд.— М.: ИНФРА-М, 2004.— XXXVI, 972 с.
31. Крушевський А. В., Швецов К. И. Математическое программирование и моделирование в экономике: Учеб. пособ. для вузов.— К.: Вища школа, 1979.— 456 с.
32. Медведев Г. А. Начальний курс финансовой математики: Учеб. пособ.— М.: ТОО «Острожье», 2000.— 267 с.
33. Межейнікова Л. С., Швець В. О. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі.— Х.: Вид. група «Основа», 2004.— 96 с.
34. Математика. Навчальна програма для 10–11 кл. загальноосвітн. навч. закл. (рівень стандарту) // Сайт МОНУ.— Режим доступу до сайту: http://www.mon.gov.ua
35. Олійник О. В., Тимченко І. Є. Олімпіадні завдання з економіки: Збірник.— Х.: Веста: Вид-во «Ранок», 2007.— 400 с.
36. Пінчук О., Лавінський М. Розв'язуємо задачі з економіки: Посіб. для вчителів.— К.: Шк. Світ, 2008.— 128 с.
37. Пінчук О., Лавінський М. Розв'язуємо задачі з економіки: Посіб. для вчителів.— К.: Шк. світ, 2008.— 128 с.

38. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів мат. спец. пед. навч. закл.— К.: Зодіак — ЕКО, 2000.— 512 с.
39. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи вивчення математики: Метод. посіб.— К.: Радянська школа, 1983.— 192 с.
40. Сухарський В. С. Економічний словник-довідник.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2002.— 328 с.
41. Вайнтрауб М. А., Стрельченко О. С., Стрельченко І. Г. Фінансова математика: Навч. посіб.— К.: ТОВ «Арт-програми», 2002.— 120 с.
42. Харів Б. Я. Збірник задач з мікроекономіки: Навч. посіб. для 9–11 кл. загальноосвітн. навч. закл. з поглибл. вивч. економіки, учителів економіки.— Рівне, 2008.— 488 с.
43. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя.— М.: Просвещение, 1990.—96 с.
44. Швець В.О., Білянін Г. І. Математика: Навч. посіб.— Чернівці: Зелена Буковина, 2003.— 382 с.
45. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвітн. навч. закл.— К.: Зодіак — ЕКО, 2002.— 272 с.
46. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвітн. навч. закл.— К.: Зодіак — ЕКО, 2006.— 384 с.

ЗМІСТ

10 клас

11 клас