2. Веркин Б. И. Проблема долговечности металлов при низких температурах / Б. И. Веркин, И. М. Любарский, Н. М. Гринберг и др. // Космич. исслед. на Украине. – 1973. – Вып.1. – С. 14-22.

3. Прочность материалов и конструкций при криогенных температурах / В. А. Стрижало, Н. В. Филин, Б. А. Куранов и др. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.

4. Ивщенко Л. И. Особенности изнашивания трибосопряжений в условиях трехмерного нагружения / Л. И. Ивщенко, В. В. Цыганов, И. М. Закиев // Трение и износ. – 2011. – Т. 32, № 1. – С. 500-509.

5. Ивщенко Л. И. Ускоренные испытания сложнонагруженных деталей трибосопряжений / Л. И. Ивщенко, В. В. Цыганов, В. И. Черный // Вісник двигунобудування. – 2009. – № 1. – С. 150-154.

6. Запорожец В. В. Выбор критериев и синтез алгоритма оценки видов изнашивания / В. В. Запорожец, В. А. Бердинских, В. В. Варюхно // Трение и износ. – 1988. – Т. 9, № 6. – С. 975-984.

7. Тарасов Г. Ф. Термическая обработка сталей как фактор повышения их износостойкости при низких температурах / Г. Ф. Тарасов, А. И. Горбуля // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. академика М. Ф. Решетнева. – 2005. – № 3. – С. 253-257.

8. Костецкий Б. И. О роли вторичных структур в формировании механизмов трения, смазочного действия и изнашивания / Б. И. Костецкий // Трение и износ. – 1980. – Т.1, № 4. – С. 622-638.

9. Игнатович С. Р. Оценка поврежденности поверхностного слоя материалов при циклических нагружениях методами наноиндентирования и наносклерометрии / С. Р. Игнатович, И. М. Закиев, Д. И. Борисов // Проблемы прочности. – 2006. – № 4. – С. 132-139.

УДК 536.24:621.791.55

И.М. Кузяев, д-р техн. наук

В.Н. Анисимов, канд. техн. наук

ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепропетровск, Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ УЗЛОВ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрены неизотермические процессы, происходящие в процессе эксплуатации подшипников скольжения. Представлено решения для определения температурного поля и температурных напряжений в теле втулки, выполненной из полимерного материала. Решение для определения температурного поля в теле подшипника получено с использованием интегрального преобразования Лапласа. Температурные напряжения находились с учетом вязкоупругих свойств материала втулки подшипника. Разработаны программные блоки САПР для реализации полученных математических моделей с использованием математического пакета Mathcad.

Ключевые слова: подшипник, температурное поле, напряжение, преобразование Лапласа.

Розглянуто неізотермічні процеси, що відбуваються в процесі експлуатації підшипників ковзання. Представлено рішення для визначення температурного поля й температурних напружень у тілі втулки, виконаної з полімерного матеріалу. Рішення для визначення температурного поля в тілі підшипника отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Температурні напруження визначалися з урахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу втулки підшипника. Розроблено програмні блоки САПР для реалізації отриманих математичних моделей з використанням математичного пакета Mathcad.

Ключові слова: підшипник, температурне поле, напруження, перетворення Лапласа.

Not isothermal processes occurring while in service of bearings of sliding are considered. It is presented decisions for definition of a temperature field and temperature pressure in a body of the plug executed from a polymeric material. The decision for definition of a temperature field in a bearing body is received with use of integrated transformation Laplace. Temperature pressure were taking into account viscoelastic properties of a material of the plug of the bearing. Program blocks SAPR are developed for realization of the received mathematical models with use of mathematical package Mathcad.

Key words: the bearing, a temperature field, pressure, transformation Laplace.

Постановка проблемы. В подавляющем большинстве оборудования, имеющего вращательные элементы, используются подшипники скольжения, одним из основных элементов которых являются вкладыши или втулки, выполненные из антифрикционного материала. При этом данного типа подшипники могут работать в режиме жидкостного трения или без смазки. В последнем случае втулки изготавливаются из самосмазывающихся материалов, что значительно упрощает конструкцию подшипникового узла, устраняя конструктивные элементы, связанные с подачей и отводом смазывающихся материалов.

Основные условия функционирования подшипников скольжения с самосмазывающимися материалами связаны с тем, что в процессе скольжения возникают микроабразивные частицы, которые имеют способность высвобождать твердую смазку из граничного слоя скольжения, внедренную в самосмазывающийся материал. При этом создается прочная пленка твердой смазки на сопрягаемых поверхностях. В процессе износа этой пленки при скольжении, обусловленном высокой скоростью движения или сторонними частицами, возникают дополнительные энергетические условия, приводящие к возрастанию износа, что, в свою очередь, приводит к высвобождению дополнительной порции сухой твердой смазки, вызывающей восстановление смазывающей пленки. Протекание процесса по данной схеме особую ценность имеет при эксплуатации оборудования в тяжелых условиях работы, а именно, при больших уровнях нагрузок и высоких температурных полях, возникающих как под воздействием внешних температурных полей, так и за счет сил трения в зоне контакта с вращающимися и неподвижными элементами подшипника скольжения. Поэтому особое значение при проектировании подшипников скольжения имеет оптимизация температурно-силовых факторов в соответствии с геометрическими параметрами и свойствами используемых рабочих элементов.

Анализ публикаций. Для описания неизотермических процессов, возникающих в подшипниковых узлах скольжения, следует воспользоваться уравнениями баланса тепловой энергии с соответствующими граничными условиями. При этом в зависимости от геометрической конфигурации рабочих элементов выбирается и соответствующая система координат. Как правило, рабочие элементы подшипников скольжения выполнены цилиндрической формы, значит и для построения математической модели следует воспользоваться цилиндрической системой координат. При этом для описания температурного поля в цилиндрических элементах при нестационарных режимах работы, выполнив необходимые допущения, приходим к уравнениям теплопереноса в таком виде [1-4]:

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} \right), \tag{1}$$

где $T(r,t)$ – функциональная зависимость температуры от радиуса r и времени t; ρ – плотность материала втулки; C, λ – коэффициенты соответственно теплоемкости и теплопроводности.

В работе [5], базируясь на уравнении (1), разработана математическая модель, позволяющая моделировать температурные поля в подшипниковом узле скольжения. При этом в качестве расчетной схемы принята трехслойная модель, в средине которой находится втулка. Параметры втулки, входящие в уравнение (1), обозначаются индексом p. Наружным и внутренним элементами данной модели будут корпус и вал, параметры которых обозначаются соответственно индексами c и s.

С целью определения зависимости температуры от параметров, входящих в уравнение (1), в явном виде следует выбрать соответствующие граничные условия по радиусу и начальное условие по времени.

Для втулки на внутренней границе, вследствие наличия сил трения между ней и валом, следует принять температурное условие второго рода, а именно:

$$\lambda_p \cdot \frac{\partial T_p}{\partial r} = q_{gr} \text{ при } r = Rp_{in}. \tag{2}$$

В выражении (2) введены такие обозначения: Rp_{in} – внутренний радиус втулки; q_{gr} – тепловой поток на границе раздела вал-втулка, который можно представить в нескольких видах (в зависимости от наличия и конструктивного исполнения системы охлаждения вала). Если вал имеет систему для охлаждения, например, вал выполнен с центральным отверстием для подвода хладагента, то тепловой поток на границе можно записать так:

$$q_{gr} = V_s \cdot f_{gr} \cdot P_{gr} - \frac{\lambda_s}{h_s} \cdot \left[T_p(Rp_{in}, t) - T_p(Rp_{in} - h_s, t) \right], \tag{3}$$

где f_{gr} – коэффициент трения между втулкой и поверхностью вала; P_{gr} – давление, развиваемое на границе раздела вал-втулка; h_s – толщина тела вала (разность между наружным и внутренним диаметрами вала); V_s – линейная скорость наружной поверхности вала.

При записи выражения (3) и входящих в него величин пренебрегается разницей между внутренним радиусом втулки и наружным радиусом вала ($Rp_{in} = Rs_{ex}$). Кроме того, также принимается равенство между наружным диаметром втулки и внутренним диаметром вала ($Rp_{ex} = Rc_{in}$).

Аналогичным образом можно, в случае наличия охлаждения, представить граничное условие и на наружной границе втулки, а именно:

$$\lambda_p \cdot \frac{\partial T_p}{\partial r} = q_{ex} \text{ при } r = Rp_{ex}, \tag{4}$$

где

$$q_{ex} = -\frac{\lambda_c}{h_c} \cdot \left[T_p(Rp_{ex}, t) - T_p(Rp_{ex} + h_c, t) \right]. \tag{5}$$

В последние два выражения введены такие обозначения: q_{ex} – тепловой поток, который отводится от наружной границы втулки; Rp_{ex}– наружный радиус втулки; h_c – толщина тела корпуса.

Если же конструктивное исполнение подшипниковых узлов не позволяет выполнить систему охлаждения вала, то большее количество тепла, выделившееся на границе раздела вал-втулка, будет накапливаться в этой зоне. Определенная часть тепла будет отводиться через торцевые поверхности вала и радиальную поверхность вала вне зоны установки подшипника. В таком случае внутреннюю поверхность втулки можно считать теплоизолированной и граничное условие (2) перепишется так:

$$\lambda_p \cdot \frac{\partial T_p}{\partial r} = q'_{gr} \text{ при } r = Rp_{in}, \tag{2a}$$

где

$$q'_{gr} = V_s \cdot f_{gr} \cdot P_{gr} - q_{ot}. \tag{3a}$$

Величина q_{ot} представляет собой тепло, отводимое через торцевые поверхности вала и радиальную поверхность вала вне зоны установки подшипника.

Решение, как обычных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных типа (1) удобно находить с использованием операционного исчисления, основанного на интегральном преобразовании Лапласа [6-8].

Операционный метод решения задачи можно свести к следующим этапам:

– первый: от искомой функции (оригинала) $f(t)$ переходят к функции изображения $F(s)$, при этом величина t соответствует действительности переменной, а s – в общем случае может быть и комплексной переменной;

– второй: над изображением $F(s)$ выполняют операции, которые соответствуют заданным операциям над $f(t)$ и получают операторное уравнение относительно $F(s)$. При этом операции над изображением оказываются значительно более простыми, например, дифференцирование оригинала соответствует умножению изображения на переменную s, а интегрирование – деление на s и т. п.;

– третий: полученное операторное уравнение решают относительно $F(s)$, что, как правило, сводится к простым алгебраическим действиям;

– четвертый: от найденного изображения $F(s)$ переходят к оригиналу $f(t)$, который является искомой функцией.

Для перехода от оригинала к изображению в общем случае можно использовать такое выражение:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f(t)dt\,. \tag{6}$$

Чтобы осуществить обратный переход (от изображения к оригиналу) опять же в общем случае можно воспользоваться таким соотношением:

$$f(t)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{s\cdot t}\cdot F(s)ds\,, \tag{7}$$

где i – мнимая единица.

Для упрощения прямого и обратного переходов, чтобы каждый раз не пользоваться уравнениями (6) и (7), разработано большое количество теорем. Так, для прямого перехода от оригинала к изображению основной теоремой является теорема о дифференцировании оригинала, которая для производной *n*-й степени имеет вид:

$$f^n(t)\leftrightarrow s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0), \tag{8}$$

где $f(0)$ – начальное условие для искомой величины; $f'(0)$, $f^{(n-1)}(0)$ – начальные условия для производных от искомой величины, начиная от первой и заканчивая $(n-1)$.

Кроме того, для решения уравнения (1), с учетом прямого и обратного переходов, также используют такие теоремы:

– теорему умножения (теорему Бореля):

$$F(s)\cdot G(s)\leftrightarrow\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau\,, \tag{9}$$

– вторую теорему разложения:

$$\frac{A(s)}{B(s)}\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\cdot e^{s_k\cdot t}\,, \tag{10}$$

где s_k – значения полюсов; $\leftrightarrow$ − двухсторонняя стрелка означает возможность взаимного перехода; $B'(s_k)=\frac{d}{ds}B(s)\Big|_{s=s_k}$.

Цель статьи. Получить математические модели, позволяющие моделировать неизотермические процессы в узлах подшипников скольжения. Полученные уравнения должны позволить описывать температурные поля и температурные напряжения в теле подшипника с учетом его вязкоупругих свойств.

Изложение основного материала. Используя прямое преобразование Лапласа по времени для уравнения (1) с учетом выражения (8), получаем такое операторное уравнение:

$$\left(T^L{}_{,r}\right)_{,r}+1/r\cdot T^L{}_{,r}-s/a\cdot T^L=T_n/a\,, \tag{11}$$

где T^L – изображение температуры $T(r,t)$; $_{,r}$ − символ производной по координате r; T_n – начальная температура рассматриваемого элемента; a – коэффициент температуропроводности $(a=\lambda/(C\cdot\rho))$.

Уравнение (11) является одной из разновидностью уравнений Бесселя [8; 9], для данного случая его решение имеет следующий вид:

$$T^L=T_n/s+C_1\cdot J_0\left(\sqrt{s/a_1}\cdot i\cdot r\right)+C_2\cdot Y_0\left(\sqrt{s/a_1}\cdot i\cdot r\right), \tag{12}$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка; i – мнимая единица; C_1 и C_2 – константы интегрирования.

Выполняя соответствующие преобразования с учетом приведенных зависимостей, получено решение тепловой задачи для подшипникового узла в таком виде:

$$T(r,t) = T_n - Q_{gr} - Q_{ex}, \tag{13}$$

где

$$Q_{gr} = q_{gr} \cdot \frac{2 \cdot Rp_{in}}{\lambda_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C1_k(r)}{P_k^2 \cdot (2/P_k \cdot \psi 1_k - \psi 2_k)} \cdot \theta_k(t);$$

$$Q_{ex} = q_{ex} \cdot \frac{2 \cdot Rp_{in}}{\lambda_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C2_k(r)}{P_k^2 \cdot (2/P_k \cdot \psi 1_k - \psi 2_k)} \cdot \theta_k(t).$$

Комплексы, входящие в последние выражения, имеют вид:

$$\psi 1_k = Y_1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J_1(P_k) - Y_1(P_k) \cdot J_1(P_k \cdot Rp_{ei}); \tag{14}$$

$$\psi 2_k = Rp_{ei} \cdot \begin{bmatrix} Y_0(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J_1(P_k) - \\ -Y_1(P_k) \cdot J_0(P_k \cdot Rp_{ei}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J_0(P_k) - \\ -Y_0(P_k) \cdot J_1(P_k \cdot Rp_{ei}) \end{bmatrix}; \tag{15}$$

$$C1_k(r) = J_1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot Y_0(P_k \cdot Rp_{ri}) - Y_1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J_0(P_k \cdot Rp_{ri}); \tag{16}$$

$$C2_k(r) = Y_1(P_k) \cdot J_0(P_k \cdot Rp_{ri}) - J_1(P_k) \cdot Y_0(P_k \cdot Rp_{ri}); \tag{17}$$

$$\theta_k(t) = exp(-Ct_k \cdot t) + Ct_k \cdot t - 1. \tag{18}$$

В уравнения (14) – (18) входят такие обозначения (не введенные ранее): J_1, Y_1 – функции Бесселя соответственно первого и второго рода первого порядка; $Rp_{ei} = Rp_{ex}/Rp_{in}$; $Rp_{ri} = r/Rp_{in}$; $Ct_k = a_p \cdot (P_k)^2 / Rp_{in}{}^2$; P_k – нули, которые определяются из выражения:

$$Y_1(Rp_{ei} \cdot P_k) \cdot J_1(P_k) - Y_1(P_k) \cdot J_1(Rp_{ei} \cdot P_k) = 0. \tag{19}$$

Определение нулей P_k по уравнению (19) для конкретных геометрических размеров подшипника приведено в программном блоке САПР-1. Графическое представление нулей изображено на рис. 1. Следует отметить, что как рисунке 1, так и все последующие рисунки, полученные в результате расчетов в программных блоках с использованием пакета Mathcad, дополнительно обрабатывались с помощью прикладного пакета Photoshop.

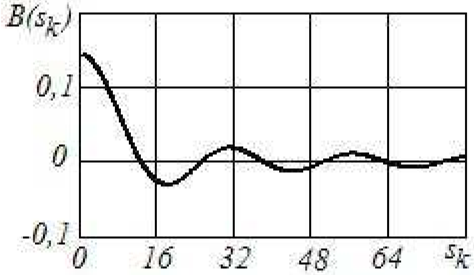
Программный блок САПР-1

Определение нулей P_k по уравнению (19)

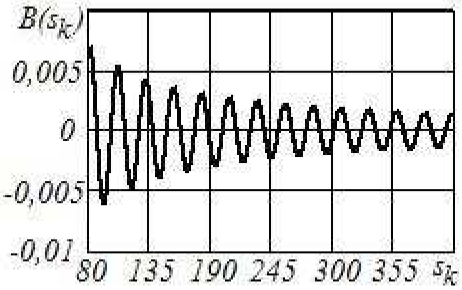
$$Rp_{ex} := 12.5mm \quad Rp_{in} := 10mm$$

$$Rp_{ei} := \frac{Rp_{ex}}{Rp_{in}} \quad Rp_{ei} = 1.25 \quad s_k := 0, 0.1..410$$

$$B(s_k) := Y1(Rp_{ei} \cdot s_k) \cdot J1(s_k) - Y1(s_k) \cdot J1(Rp_{ei} \cdot s_k)$$



а)



б)

Рис. 1. Графическое определение нулей:
а − на начальном отрезке; б − на конечном отрезке

$$P_k := \left| \begin{array}{l} P1_0 \leftarrow 4 \cdot \pi \\ \text{for} \quad k \in 0..31 \\ \quad \left| \begin{array}{l} Pa \leftarrow P1_k \\ P_k \leftarrow root(B(Pa), Pa) \\ P1_{k+1} \leftarrow (k+2) \cdot 4 \cdot \pi \end{array} \right. \\ P \end{array} \right.$$

Начальные значения нулей

$P_k^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	12.59	25,14	37,71	50,27	62,84	75,40	87,97	100,53	113,1	125,67

Чтобы решить уравнение (13) с учетом соотношений (14) – (18), при выполнении условия (19), необходимо дополнительно определить температуры на границах втулки, а именно: $Tp(Rp_{in}, t)$ и $Tp(Rp_{ex}, t)$. Для этого на основе выражения (13), при подстановке в него соответствующих граничных значений, можно представить такое соотношение в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} Tp(Rp_{in}, t) \\ Tp(Rp_{ex}, t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_s}{h_s \cdot \lambda_p} \cdot Cv_1(t), & -\dfrac{2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_c}{h_c \cdot \lambda_p} \cdot Cv_2(t), \\ -\dfrac{2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_s}{h_s \cdot \lambda_p} \cdot Cn_1(t), & 1 - \dfrac{2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_c}{h_c \cdot \lambda_p} \cdot Cn_2(t), \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TP_0 \\ TP_1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где

$$TP_0 = T_n - VP \cdot Cv_1(t) - TR_e \cdot Cv_2(t) - TR_i \cdot Cv_1(t);$$
$$TP_1 = T_n - VP \cdot Cn_1(t) - TR_e \cdot Cn_2(t) - TR_i \cdot Cn_1(t);$$
$$VP = \frac{V_s \cdot f_{gr} \cdot P_{gr} \cdot 2 \cdot Rp_{in}}{\lambda_p};$$
$$TR_e = \frac{Tp(Rp_{ex}, t) \cdot 2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_c}{h_c \cdot \lambda_p}; \; TR_i = \frac{Tp(Rp_{in}, t) \cdot 2 \cdot Rp_{in} \cdot \lambda_s}{h_s \cdot \lambda_p}$$
$$Cv_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C1_k(Rp_{in}) \cdot \theta_k(t)}{P_k \cdot \psi_k}; \; Cv_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C2_k(Rp_{in}) \cdot \theta_k(t)}{P_k \cdot \psi_k};$$
$$Cn_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C1_k(Rp_{ex}) \cdot \theta_k(t)}{P_k \cdot \psi_k}; \; Cn_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C2_k(Rp_{ex}) \cdot \theta_k(t)}{P_k \cdot \psi_k};$$
$$\psi_k = 2 / P_k \cdot \psi 1_k - \psi 2_k .$$

Прежде чем воспользоваться полученными формулами для определения температуры в подшипнике, следует иметь соответствующие зависимости коэффициента трения f_{gr} от основных параметров в зоне контакта, а именно: температуры, давления и скорости скольжения.

Для полиуретана экспериментальные значения коэффициента трения f_e от температуры T_e приведены в таблице 1 (для контактного давления P_{gr} = 0,35 МПа и скорости скольжения V = 0,4 м/с).

Таблица 1

Зависимость коэффициента трения от температуры для полиуретана

T_e, K	293	303	313	323	333	343	353	363	373	383	393	403	413
f_e	0,85	0,94	1,02	1,08	1,13	1,18	1,19	1,2	1,16	1,1	1,04	0,97	0,9

Для того чтобы воспользоваться данными, приведенными в таблице 1, для расчета температурного поля следует выполнить аппроксимацию.

Порядок выполнения аппроксимации с использованием одной из встроенных в пакет Mathcad функций приведен в программном блоке САПР-2. Графики для экспериментальных и аппроксимируемых значений коэффициента трения приведены на рисунке 2.

Программный блок САПР-2

Аппроксимация коэффициента трения

$$T_e := (293 \quad 303 \quad 313 \quad 323 \quad 333 \quad 343 \quad 353 \quad 363 \quad 373 \quad 383 \quad 393 \quad 403 \quad 413)^T$$

$$f_e := (0.85 \quad 0.94 \quad 1{,}02 \quad 1{,}08 \quad 1{,}13 \quad 1{,}18 \quad 1{,}19 \quad 1{,}2 \quad 1{,}16 \quad 1{,}1 \quad 1{,}04 \quad 0{,}97 \quad 0{,}9)^T$$

$$fv := pspline(T_e, f_e) \quad T := 293K, 298K..413K \quad f(T) := interp(fv, T_e, f_e, T)$$

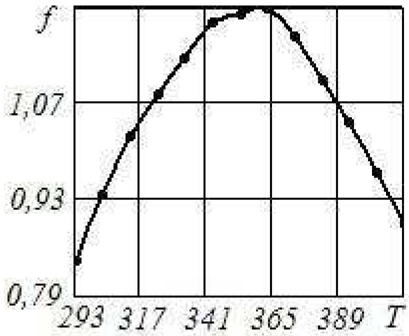


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента трения от температуры:

• • • − график для экспериментальных значений (fe_i);

—— − график для аппроксимируемых значений ($f(T)$)

Расчет температурного поля во втулке подшипника, выполненного из полиуретана, с учетом граничных условий (2) и (3) и соотношения (20) приведен в программном блоке САПР-3. Объемный график распределения температуры, полученный из программного блока САПР-3, представлен на рисунке 3.

Программный блок САПР-3

Расчет температурного поля во втулке подшипника, исходя из условий (2) и (3) и соотношения (20)

$$h_c := 10mm \quad h_s := 2mm \quad R_{ec} := Rp_{ex} + h_c \quad R_{is} := Rp_{in} - h_s \quad T_n := 293K \quad T_{ec} := 293K \quad T_{is} := 293K$$

$$\rho_p := 1230 \cdot \frac{kg}{m^3} \quad C_p := 2.1 \cdot 10^3 \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \quad \lambda_p := 0.305 \cdot \frac{W}{m \cdot K} \quad \lambda_c := 46.5 \cdot \frac{W}{m \cdot K} \quad \lambda_s := \lambda_c \quad im := 5$$

$$a_p := \frac{\lambda_p}{C_p \cdot \rho_p} \quad t_{max} := 578s \quad i := 0..im \quad dr := \frac{Rp_{ex} - Rp_{in}}{im} \quad r_i := Rp_{in} + dr \cdot i \quad jm := 18 \quad dt := \frac{t_{max}}{jm}$$

$$j := 0..jm \quad t_j := dt \cdot j \quad kk := 31 \quad k := 0..kk$$

$$\psi 1_k := Y1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J1(P_k) - Y1(P_k) \cdot J1(P_k \cdot Rp_{ei})$$

$$\psi 2_k := Rp_{ei} \cdot (Y0(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J1(P_k) - Y1(P_k) \cdot J0(P_k \cdot Rp_{ei}))...$$
$$+ Y1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J0(P_k) - Y0(P_k) \cdot J1(P_k \cdot Rp_{ei})$$

$$\psi_k := \frac{2}{P_k} \cdot \psi 1_k - \psi 2_k \quad Ct_k := \frac{a_p \cdot (P_k)^2}{Rp_{in}^2}$$

$$C1_{k,i} := \left(J1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{r_i}{Rp_{in}} \right) - Y1(P_k \cdot Rp_{ei}) \cdot J0\left(P_k \cdot P_k \cdot \frac{r_i}{Rp_{in}} \right) \right)$$

$$C2_{k,i} := \left(Y1(P_k) \cdot J0\left(P_k \cdot \frac{r_i}{Rp_{in}} \right) - J1(P_k) \cdot Y0\left(P_k \cdot \frac{r_i}{Rp_{in}} \right) \right)$$

$$\theta_{k,j} := exp(-Ct_k \cdot t_j) + Ct_k \cdot t_j - 1 \quad F1_{i,j} := \sum_k \frac{C1_{k,j} \cdot \theta_{k,j}}{(P_k)^2 \cdot \psi_k} \quad F2_{i,j} := \sum_k \frac{C2_{k,j} \cdot \theta_{k,j}}{(P_k)^2 \cdot \psi_k}$$

$$Pgr := 0.35 \cdot 10^6 \cdot Pa \quad V_s := 0.4 \frac{m}{s} \quad R\lambda_c := \frac{2 \cdot Rp_{in}}{h_c} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_p} \quad R\lambda_s := \frac{2 \cdot Rp_{in}}{h_s} \cdot \frac{\lambda_s}{\lambda_p} \quad K_{tr} := \frac{V_s \cdot P_{gr} \cdot 2 \cdot Rp_{in}}{\lambda_p}$$

$$
\begin{aligned}
T_p := \;& fgr_0 \leftarrow f\left(T_n \cdot K^{-1}\right) \\
& for \quad i \in 0..im \\
& \quad Tp_{i,0} \leftarrow T_n \\
& for \quad j \in 1..jm \\
& \quad Cv_1 \leftarrow F1_{0,j} \oplus KC_2 \leftarrow F2_{0,j} \oplus Cn_1 \leftarrow F1_{im,j} \oplus Cn_2 \leftarrow F2_{im,j} \\
& \quad M_{0,0} \leftarrow 1 - R\lambda_s \cdot Cv_1 \oplus M_{0,1} \leftarrow -R\lambda_c \cdot Cv_2 \oplus M_{1,0} \leftarrow -R\lambda_s \cdot Cn_1 \\
& \quad M_{1,1} \leftarrow 1 - R\lambda_c \cdot Cn_2 \oplus F_{tr\,j-1} \leftarrow K_{tr} \cdot fgr_{j-1} \\
& \quad TP_0 \leftarrow T_n - F_{tr\,j-1} \cdot Cv_1 - T_{ec} \cdot R\lambda_c \cdot Cv_2 - T_{is} \cdot R\lambda_s \cdot Cv_1 \\
& \quad TP_1 \leftarrow T_n - F_{tr\,j-1} \cdot Cn_1 - T_{ec} \cdot R\lambda_c \cdot Cn_2 - T_{is} \cdot R\lambda_s \cdot Cn_1 \\
& \quad Tgr \leftarrow lsolve(M, TP) \\
& \quad T0_j \leftarrow Tgr_0 \cdot K^{-1} \oplus Tim_j \leftarrow Tgr_1 \cdot K^{-1} \\
& \quad fgr_j \leftarrow f\left(T0_j\right) \oplus f_{v\,j} \leftarrow \frac{fgr_j + fgr_{j-1}}{2} \\
& \quad for \quad i \in 0..10 \\
& \quad \quad T_{p_{i,j}} \leftarrow T0_j \cdot K \quad if \quad i = 0 \\
& \quad \quad T_{p_{i,j}} \leftarrow Tim_j \cdot K \quad if \quad i = im \\
& \quad \quad T_{p_{i,j}} \leftarrow T_n - \left[K_{tr} \cdot fgr_{j-1} - \left(T0_j \cdot K - T_{is}\right) \cdot R\lambda_s\right] \cdot F1_{i,j} ... otherwise \\
& \quad \quad + \left(Tim_j \cdot K - T_{nc}\right) \cdot R\lambda_c \cdot F2_{i,j} \\
& T_p
\end{aligned}
$$

$$T_1 := max\left[\left(T_p{}^T\right)^{\langle 0 \rangle}\right] \quad T_2 := max\left[\left(T_p{}^T\right)^{\langle 4 \rangle}\right] \quad T_1 = 298.417K \quad T_2 = 293K \,.$$

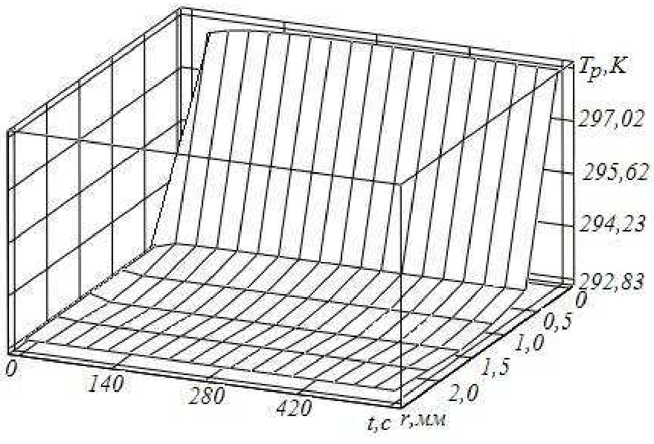


Рис. 3. Объемный график распределения температуры в теле втулки, изготовленной из полиуретана, с учетом граничных условий (2) и (3)

Вследствие того, что на границах втулки будут различные температурные условия, в результате будет возникать перепад температур, вызывающий появление температурных напряжений. Для данной геометрической конфигурации температурные напряжения можно рассчитать по формулам, соответственно для радиальных $\sigma r(r)$, кольцевых $\sigma t(r)$ и осевых $\sigma z(r)$ напряжений [10]:

$$\sigma r(r) = K\sigma \cdot \begin{bmatrix} Rp_{in}^2 \cdot ln(Rp_{ir}) - Rp_{ex}^2 \cdot ln(Rp_{er}) + \\ + Rp_{ex}^2 \cdot Rp_{in}^2 \cdot r^{-2} \cdot ln(Rp_{ei}) \end{bmatrix}; \tag{21}$$

$$\sigma t(r) = K\sigma \cdot \begin{bmatrix} Rp_{ex}^2 \cdot ln(1 - Rp_{er}) - Rp_{in}^2 \cdot ln(1 - Rp_{ir}) - \\ - Rp_{ex}^2 \cdot Rp_{in}^2 \cdot r^{-2} \cdot ln(Rp_{ei}) \end{bmatrix}; \tag{22}$$

$$\sigma z(r) = K\sigma \cdot \left[Rp_{ex}^2 \cdot ln(1 - 2 \cdot Rp_{er}) - Rp_{in}^2 \cdot ln(1 - 2 \cdot Rp_{ir})\right]. \tag{23}$$

Комплекс $K\sigma$ имеет вид:

$$K\sigma = \frac{\alpha \cdot E \cdot (T_1 - T_2)}{2 \cdot (1 - \nu) \cdot \left(Rp_{ex}^2 - Rp_{in}^2\right) \cdot ln(Rp_{ei})}, \tag{24}$$

где α – коэффициент линейного расширения; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $T_1 = Tp(Rp_{in})$; $T_2 = Tp(Rp_{ex})$.

Втулки подшипников скольжения в большинстве случаев изготавливают из полимерных материалов, которые являются вязкоупругими материалами, что следует учитывать при расчетах напряженно-деформированного состояния элементов из полимерных материалов и их композитов. При этом существуют несколько методов, учитывающих явления ползучести и релаксации при определении напряжений и деформаций в элементах под воздействием силовых, температурных и других энергетических полей. Одни методы основаны на изначальном использовании вязкоупругих моделей [11-13], а другие – базируются на использовании упругих решений с переходом к вязкоупругому обобщению [14-16].

Используя упругое решение температурной задачи в виде системы (21) – (23) с учетом (24), перейдем к вязкоупругому решению, принимая положения из [14]. При этом следует в первую очередь подчеркнуть, что переход от упругого решения к вязкоупругому опять же связан с интегральным преобразованием Лапласа, а также с его модификацией – интегральным преобразованием Лапласа-Карсона. При этом одной из основных теорем из операционного исчисления является теорема умножения, представленная уравнением (9).

При переходе от упругого решения к вязкоупругому, после соответствующих преобразований появляется функция, получившая название связной ползучести и зависящая от параметра ζ, значение которой может быть разным. Аналитически данная функция записывается таким образом:

$$Z_\zeta = \frac{1}{1 + \zeta \cdot \omega}. \tag{25}$$

Во многих случаях значение ζ составляет 0,5 и 2.

Параметр ω через коэффициент Пуассона записывается так:

$$\omega = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}. \tag{26}$$

При моделировании сложного напряженного состояния зачастую недостаточно иметь значение только модуля упругости Юнга E, но и следует знать модуль сдвига G и объемный модуль B. Данные величины связаны между собой такими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}, \\ B &= \frac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}. \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

С учетом последних выражений запишем соотношение для величины ω, а также ее изображение после преобразования Лапласа-Карсона, принимая условие независимости объемного модуля B от времени:

$$\omega = \frac{2G}{3B} \leftrightarrow \frac{2G^{LK}}{3B} = \frac{R_c^{LK}}{3B}, \tag{28}$$

где R_c^{LK} – изображение по Лапласу-Карсону функции сдвиговой релаксации.

В выражении (24) имеется один комплекс, который следует преобразовать при переходе от упругого решения к вязкоупругому, а именно: $E/(1-\nu)$. Выполнив замену данного комплекса через параметр ω, а также осуществив прямое и обратное преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{E}{(1-\nu)} = \frac{9\cdot B\cdot\omega}{2+\omega}\cdot\frac{2+\omega}{1+2\cdot\omega} = \frac{9\cdot B}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+2\cdot\omega}\right)\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \frac{9\cdot B}{2}\cdot\left(1-Z_2^{LK}\right)\leftrightarrow\frac{9\cdot B}{2}\cdot\left[1-Z_2(t)\right] \end{aligned}. \tag{29}$$

Если в первом приближении взять среднее значение величины $(1-\nu)=\nu_c$ и считать ее константой, тогда вместо преобразования (29) можно записать такое соотношение:

$$\begin{aligned} &\frac{E}{\nu_c} = \frac{9\cdot B\cdot\omega}{2+\omega}\cdot\frac{1}{\nu_c} = \frac{9\cdot B}{\nu_c}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\omega/2}\right)\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \frac{9\cdot B}{\nu_c}\cdot\left(1-Z_{1/2}^{LK}\right)\leftrightarrow\frac{9\cdot B}{\nu_c}\cdot\left[1-Z_{1/2}(t)\right] \end{aligned}. \tag{30}$$

Необходимо отметить, что при значениях аргумента $\zeta \le 0{,}5$, функцию Z_ζ можно представить так:

$$Z_\varsigma(t) = 1-\zeta\cdot\omega. \tag{31}$$

В таком случае вместо функции ползучести можно записать выражение через коэффициент Пуассона, если он известен. При этом для вязкоупругих задач коэффициент Пуассона должен быть представлен функциональной зависимостью от времени.

С учетом соотношений (26), (30) и (31), а также зависимости коэффициента Пуассона от времени, уравнения (21) – (24) перепишутся таким образом:

$$\sigma r(r,t) = K\sigma(t)\cdot\begin{bmatrix} Rp_{in}^2\cdot ln(Rp_{ir}) - Rp_{ex}^2\cdot ln(Rp_{er}) + \\ + Rp_{ex}^2\cdot Rp_{in}^2\cdot r^{-2}\cdot ln(Rp_{ei}) \end{bmatrix}; \tag{32}$$

$$\sigma t(r,t) = K\sigma(t)\cdot\begin{bmatrix} Rp_{ex}^2\cdot ln(1-Rp_{er}) - Rp_{in}^2\cdot ln(1-Rp_{ir}) - \\ - Rp_{ex}^2\cdot Rp_{in}^2\cdot r^{-2}\cdot ln(Rp_{ei}) \end{bmatrix}; \tag{33}$$

$$\sigma z(r,t) = K\sigma(t)\cdot\left[Rp_{ex}^2\cdot ln(1-2\cdot Rp_{er}) - Rp_{in}^2\cdot ln(1-2\cdot Rp_{ir})\right]; \tag{34}$$

$$K\sigma(t) = \frac{\alpha\cdot 9\cdot B\cdot(T_1-T_2)}{4\cdot\nu_c\cdot\left(Rp_{ex}^2-Rp_{in}^2\right)\cdot ln(Rp_{ei})}\cdot\frac{1-2\nu}{1+\nu}. \tag{35}$$

Для определения экспериментальных значений коэффициента Пуассона ν_e проведены замеры продольной ε_x и поперечной ε_y деформаций во времени t_e. Результаты экспериментов следующие: ε_x= (0,119; 0,2381; 0,3571; 0,4762; 0,5952; 0,7143; 0,8334; 0,9524; 1,0714; 1,1905; 1,3095; 1,4286; 1,5476; 1,6667; 1,7857; 1,9048; 2,0238); ε_y=

(0,053; 0,086; 0,1241; 0,1442; 0,1606; 0,1788; 0,1898; 0,2001; 0,2135; 0,2226; 0,2299; 0,239; 0,250; 0,2573; 0,2646; 0,2737; 0,2792); t_e = (34; 68; 102; 136; 170; 204; 238; 272; 306; 340; 374; 408; 442; 476; 510; 544; 578) с.

Порядок выполнения аппроксимации коэффициента Пуассона приведен в программном блоке САПР-4. Графики для экспериментальных и аппроксимируемых значений коэффициента Пуассона приведены на рисунке 4.

Программный блок САПР-4

Аппроксимация коэффициента Пуассона

$$t1_e := \begin{pmatrix} 34 \\ 68 \\ 102 \\ 136 \\ 170 \\ 204 \\ 238 \\ 272 \\ 306 \end{pmatrix} \quad t2_e := \begin{pmatrix} 340 \\ 374 \\ 408 \\ 442 \\ 476 \\ 510 \\ 544 \\ 578 \end{pmatrix} \quad \varepsilon 1_x := \begin{pmatrix} 0.119 \\ 0.2381 \\ 0.3571 \\ 0.4762 \\ 0.5952 \\ 0.7143 \\ 0.8334 \\ 0.9524 \\ 1.0714 \end{pmatrix} \quad \varepsilon 2_x := \begin{pmatrix} 1.1905 \\ 1.3095 \\ 1.4286 \\ 1.5476 \\ 1.6667 \\ 1.7857 \\ 1.9048 \\ 2.0238 \end{pmatrix} \quad \varepsilon 1_y := \begin{pmatrix} 0.053 \\ 0.086 \\ 0.1241 \\ 0.1442 \\ 0.1606 \\ 0.1788 \\ 0.1898 \\ 0.2001 \\ 0.2135 \end{pmatrix} \quad \varepsilon 2_y := \begin{pmatrix} 0.2226 \\ 0.2299 \\ 0.239 \\ 0.250 \\ 0.2573 \\ 0.2646 \\ 0.2737 \\ 0.2792 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_x := stack(\varepsilon 1_x, \varepsilon 2_x) \quad \varepsilon_y := stack(\varepsilon 1_y, \varepsilon 2_y)$$

$$t_e := stack(t1_e, t2_e) \quad \nu_e := \overrightarrow{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}} \quad t := 34, 38..578$$

$$ij := 0..16 \quad fv := regress(t_e, \nu_e, 2) \quad \nu 1(t) := interp(fv, t_e, \nu_e, t)$$

$$t1_j := 34 \cdot (1 + j) \quad \nu_j := \nu 1(t1_j) \quad \nu_c := mean(\nu) \quad \nu_c = 0.222$$

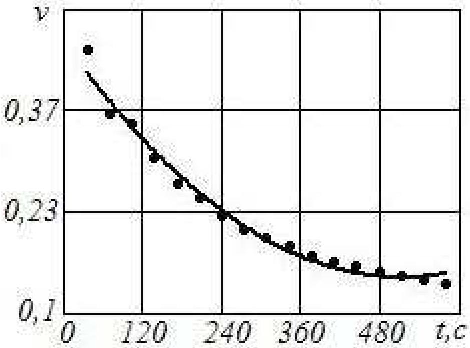


Рис. 4. Графики зависимости коэффициента Пуассона от температуры:
• • • − график для экспериментальных значений (ν_e);
—— − график для аппроксимируемых значений (ν_j)

Порядок выполнения расчетов температурных напряжений для упругой и вязкоупругой задач приведен в программном блоке САПР-5. Плоские графики изменения напряжений для упругой задачи приведены на рисунке 5. Объемные графики изменения напряжений для вязкоупругой задачи изображены на рисунке 6.

Программный блок САПР-5

Расчет температурных напряжений

$$\alpha := 9.5 \cdot 10^{-5} \cdot K^{-1} \quad E := 200 \cdot 10^6 \cdot Pa$$

$$im := 10 \quad i := 0..im \quad dr := \frac{Rp_{ex} - Rp_{in}}{im}$$

$$r_i := Rp_{in} + dr \cdot i$$

$$Rr_i := Rp_{ex}^2 \cdot Rp_{in}^2 \cdot (r_i)^{-2} \cdot ln(Rp_{ei})$$

$$Lni_i := ln\left(\frac{Rp_{in}}{r_i}\right) \quad Lne_i := ln\left(\frac{Rp_{ex}}{r_i}\right)$$

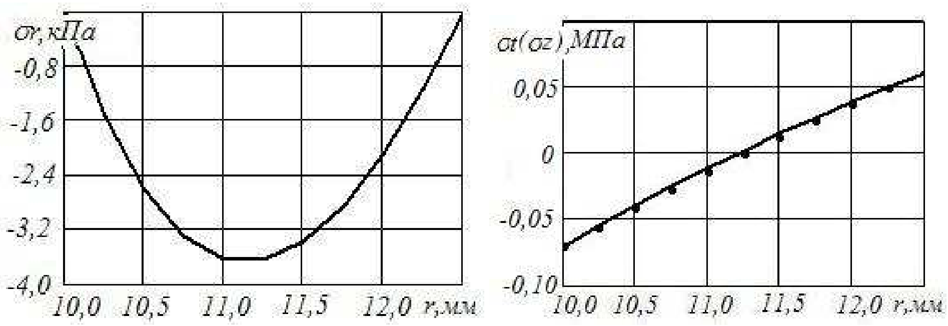
Упругая задача

$$K_{TR} := \frac{\alpha \cdot E \cdot (T_1 - T_2)}{2 \cdot (1-\nu_c) \cdot (Rp_{ex}^2 - Rp_{in}^2) \cdot ln(Rp_{ei})}$$

$$\sigma r_i := K_{TR} \cdot (Rp_{in}^2 \cdot Lni_i - Rp_{ex}^2 \cdot Lne_i + Rr_i)$$

$$\sigma t_i := K_{TR} \cdot \left[Rp_{ex}^2 \cdot (1 - Lne_i) - Rp_{in}^2 \cdot (1 - Lni_i) - Rr_i\right]$$

$$\sigma z_i := K_{TR} \cdot \left[Rp_{ex}^2 \cdot (1 - 2 \cdot Lne_i) - Rp_{in}^2 \cdot (1 - 2 \cdot Lni_i)\right]$$



а) б)

Рис. 5. Плоские графики изменения напряжений для упругой задачи с учетом распределения температур по рисунку 3:
а − радиальные напряжения; б − кольцевые (——) и осевые (• • •) напряжения

Вязкоупругая задача

$$B := 122.9 \cdot 10^6 \cdot Pa$$

$$K\sigma_j := \frac{\alpha \cdot 9 \cdot B \cdot (T_1 - T_2)}{4 \cdot \nu_c \cdot (Rp_{ex}^2 - Rp_{in}^2) \cdot ln(Rp_{ei})} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu_j}{1 + \nu_j}$$

$$\sigma r_{i,j} := K\sigma_j \cdot (Rp_{in}^2 \cdot Lni_i - Rp_{ex}^2 \cdot Lne_i + Rr_i)$$

$$\sigma t_{i,j} := K\sigma_j \cdot \left[Rp_{ex}^2 \cdot (1 - Lne_i) - Rp_{in}^2 \cdot (1 - Lni_i) - Rr_i\right]$$

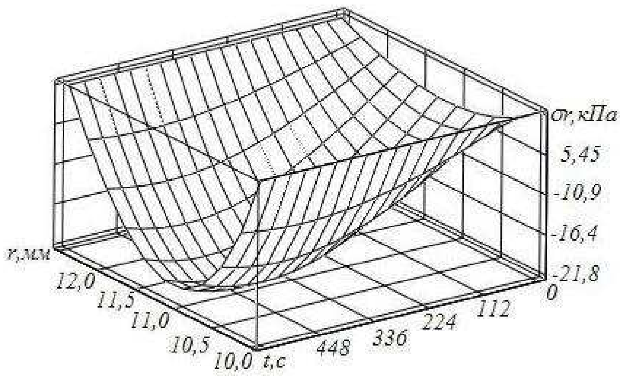
$$\sigma z_{i,j} := K\sigma_j \cdot \left[Rp_{ex}^2 \cdot (1 - 2 \cdot Lne_i) - Rp_{in}^2 \cdot (1 - 2 \cdot Lni_i)\right]$$

$$\sigma z_{0,0} = -8.192 \times 10^4\, Pa \quad \sigma z_{im,im} = 3.371 \times 10^5\, Pa$$

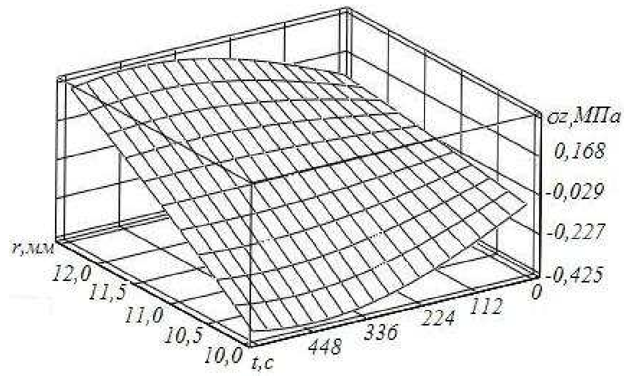
$$max(\sigma z) = 3.663 \times 10^5\, Pa$$

$$min(\sigma z) = -4.249 \times 10^5\, Pa$$

$$min(\sigma r) = -2.182 \times 10^4\, Pa$$



а)



б)

Рис. 6. Объемные графики изменения напряжений для вязкоупругой задачи с учетом распределения температур по рисунку 3: а − радиальные напряжения; б − осевые напряжения

При выполнении граничных условий (2а) и (3а) температурный режим значительно ухудшается. При этом возрастает перепад температур, что в свою очередь приводит к увеличению температурных напряжений. На рисунке 7 представлен объемный график распределения температур при условии, когда от зоны раздела отводится 90 % тепла, полученного от работы трения (скорость скольжения и давление приняты такими же, как и для рис. 3, а время составляет всего 3 с).

Как видно из рис. 7, даже при отводе 90 % тепла из зоны контакта, на границе раздела в течении трех секунд температура достигает 493 К, что может привести к термодеструкции.

На рисунке 8 приведены графики для температурных напряжений, полученные с учетом перепада температур по рисунку 7. При этом следует отметить значительный рост всех компонентов напряжений.

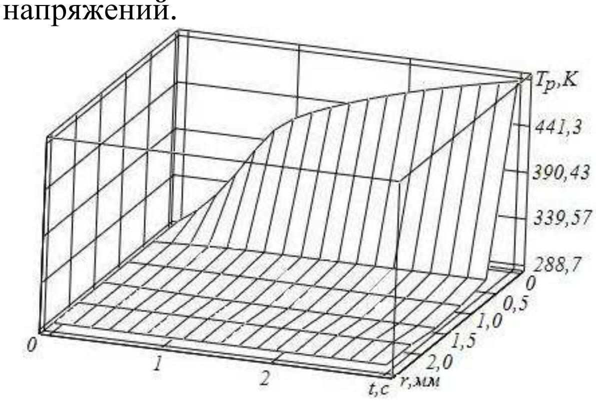


Рис. 7. Объемный график распределения температуры в теле втулки, изготовленной из полиуретана, с учетом граничных условий (2а) и (3а)

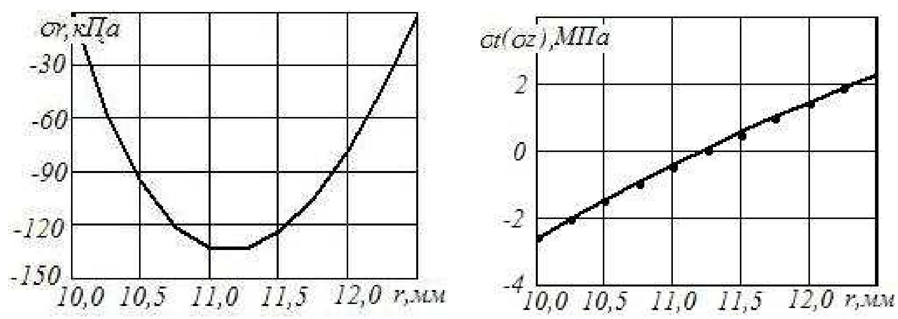


Рис. 8. Плоские графики изменения напряжений для упругой задачи с учетом распределения температур по рисунку 7: а − радиальные напряжения; б − кольцевые (——) и осевые (• • •) напряжения

Выводы.

1. Получены математические модели для анализа распределения температурного поля во втулке (вкладыше) подшипников скольжения, как при наличии охлаждающего отверстия вдоль оси вала, так и без него.

2. Получены математические модели для расчета температурных напряжений с учетом вязкоупругих свойств материала.

3. Разработаны программные блоки на базе математического пакета Mathcad для моделирования температурных полей и температурных напряжений.

4. Результаты, приведенные в программных блоках, показывают, что при определенных соотношениях геометрических и технологических параметров, в соответствии с характеристиками материала, могут возникать значительные температурные поля в зоне контакта втулки с валом, что может явиться причиной термомеханической деструкции. Полученные математические модели позволяют оптимизировать условия эксплуатации подшипников скольжения.

Список использованных источников

1. Лыков В. А. Теория теплопроводности / В. А. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.

2. Кузяєв І. М. Моделювання роботи та проектування екструзійних агрегатів з розробкою елементів САПР / І. М. Кузяєв. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2008. – 474 с.

3. Кузяев И. М. Моделирование работы и проектирование экструзионных агрегатов с разработкой блоков САПР. Червячные прессы / И. М. Кузяев, А. Д. Петухов. – Днепропетровск: ГВУЗ УГХТУ, 2012. – 413 с.

4. Кузяєв І. М. Механіка та реологія полімерів: навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / І. М. Кузяєв. – Дніпропетровськ: УДХТУ, 2002. – 386 с.

5. Кузяев И. М. Анализ температурных процессов в подшипниках скольжения с учетом трения / И. М. Кузяев, В. Н. Анисимов // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2012. – № 1. – С. 27-40.

6. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

7. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

8. Кузяєв І. М. Основи математичного моделювання процесів по переробці полімерних матеріалів: навчальний посібник / І. М. Кузяєв, О. Н. Півень, В. П. Місяць. – Дніпропетровськ: ДВНЗ УДХТУ, 2012. – 283 с.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. С. Ф. Фомина / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

10. Кантарович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов / З. Б. Кантарович. – М.: ГНТИМЛ., 1960. – 743 с.

11. Виноградов Г. В. Реология полимеров / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин. – М.: Химия, 1977. – 440 с.

12. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости: пер. с англ. / Р. Кристенсен; под ред. Г. С. Шапиро. – М.: Мир, 1974. – 338 с.

13. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.

14. Колтунов М. А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М. А. Колтунов, В. П. Майборода, В. Г. Зубчанинов. – М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.

15. Кузяев И. М. Расчет давления в зоне контакта жесткой сферы с вязкоупругой средой / И. М. Кузяев, А. И. Буря // Проблеми трибології. – 2011. – № 1. – С. 136-141.

16. Буря А. И. Анализ деформированно-напряженного состояния при скольжении жесткого тела со сферической поверхностью контакта по наклонной поверхности вязкоупругой среды / А. И. Буря, И. М. Кузяев, М. Е. Казаков [и др.] // Труды 8-го Междунар. симпозиума по фрикционным изделиям и материалам. ЯРОФРИ-2010. – 2010. – С. 23-28.